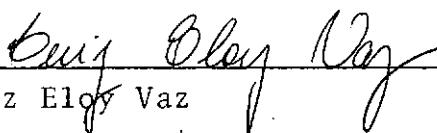


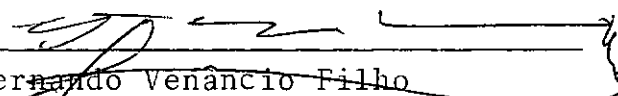
ESTUDO DE ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA  
PARA ANÁLISE DINÂMICA ESTRUTURAL

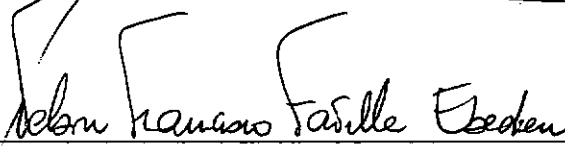
Henriette Lebre La Rovere

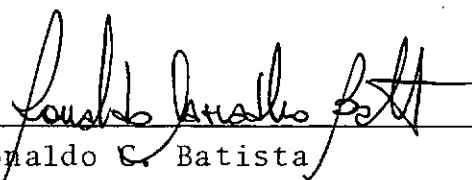
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Luiz Eloy Vaz  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Fernando Venâncio Filho

  
\_\_\_\_\_  
Nelson F. Ebecken

  
\_\_\_\_\_  
Ronaldo C. Batista

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
AGOSTO DE 1983

LA ROVERE, HENRIETTE LEBRE

Estudo de Algoritmos de Integração Direta para Análise Dinâmica Estrutural - (Rio de Janeiro) 1983

IX , 217 p. 29.7 (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

1. Dinâmica Estrutural I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

A Ruggiero, Regina, Emilio e  
Renata

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Luiz Eloy Vaz pela sugestão do tema e orientação dada a este trabalho.

Aos Professores da COPPE/UFRJ pelos ensinamentos ministrados e colaboração dispensada.

Aos funcionários da Biblioteca Central do Centro de Tecnologia e do Núcleo de Computação Eletrônica pela atenção.

À CNEN e CNPq pelo apoio financeiro.

À Daisy pelo excelente trabalho de datilografia.

A todos os colegas pela amizade e colaboração dispensados.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo comparativo dos algoritmos de integração direta (lineares e de ordem superior) utilizados para a solução das equações diferenciais da análise dinâmica estrutural.

Os sistemas estruturais usados foram supostos lineares e foram discretizados pelo Método dos Elementos Finitos.

São apresentados alguns exemplos para a comparação dos algoritmos além de um exemplo de aplicação em Engenharia.

## SUMMARY

The aim of this work is to compare the direct integration methods (linear and higher order methods) used for the numerical solution of the Structural Dynamic Equations.

The structural systems analyzed were assumed to be linear and were modelled by the Finite Element Technique.

Besides an example of application in Engineering some examples were shown to compare the direct integration methods.

# ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO II - NOÇÕES DE ANÁLISE DINÂMICA ESTRUTURAL</u> .....	3
II.1 - Introdução.....	3
II.2 - Discretização Espacial - M.E.F.....	4
II.3 - Formulação das Equações de Equilíbrio pelo Princí- pio dos Trabalhos Virtuais.....	10
II.4 - Métodos de Solução das Equações de Equilíbrio.....	14
II.4.1 - Métodos de Integração Direta.....	14
II.4.2 - Superposição Modal.....	17
II.5 - Considerações Sobre as Matrizes de Massa e de Amor- tecimento.....	21
II.5.1 - Matriz de Massa Discreta e Agrupada.....	21
II.5.2 - Matriz de Amortecimento Proporcional.....	24
<u>ESTUDO DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA</u> .....	25
<u>CAPÍTULO III - FORMULAÇÃO DOS ALGORITMOS</u> .....	25
III.1 - Método das Diferenças Centrais.....	25
III.2 - Método de Wilson- $\theta$ .....	27
III.3 - Método de Newmark.....	30
III.4 - Algoritmos Hermitianos.....	32

	<u>Pág.</u>
III.4.1 - Algoritmo Hermitiano Linear.....	34
III.4.2 - Algoritmo Hermitiano Cúbico I.....	37
III.4.3 - Algoritmo Hermitiano Cúbico II.....	40
III.4.4 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III.....	43
III.4.5 - Algoritmo Hermitiano Cúbico IV.....	49
 <u>CAPÍTULO IV - ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS ALGORITMOS.....</u>	 57
IV.1 - Introdução.....	57
IV.2 - Estabilidade.....	60
IV.2.1 - Método das Diferenças Centrais.....	62
IV.2.2 - Método de Wilson- $\theta$ .....	63
IV.2.3 - Método de Newmark.....	69
IV.2.4 - Algoritmo Hermitiano Linear.....	72
IV.2.5 - Algoritmo Hermitiano Cúbico I.....	75
IV.2.6 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III.....	78
IV.3.- Decaimento de Amplitude e Alongamento do Período...	83
IV.4 - Ordem de Precisão.....	91
IV.4.1 - Método de Wilson- $\theta$ .....	92
IV.4.2 - Método de Newmark.....	93
IV.4.3 - Algoritmo Hermitiano Linear.....	94
IV.4.4 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III.....	95
IV.5 - "Overshoot".....	96
IV.6 - Discussões Iniciais - Definição dos Algoritmos a serem Comparados.....	 103



	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO V - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS ALGORITMOS...</u>	106
V.1 - Introdução.....	106
V.2 - Esquema Computacional Comum a Todos os Algoritmos...	107
V.3 - Método de Wilson- $\theta$ .....	108
V.4 - Método de Newmark.....	110
V.5 - Algoritmo Hermitiano Linear.....	112
V.6 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III.....	114
<u>CAPÍTULO VI - COMPARAÇÃO DOS ALGORITMOS.....</u>	118
VI.1 - Critério de Comparação dos Algoritmos.....	118
VI.2 - Exemplo 1 - Haste Sujeita a Carregamento Ressonante	123
VI.3 - Exemplo 2 - Simulação de uma Ruptura Numa Tubulação Secundária do Prédio de um Reator.....	139
VI.4 - Conclusões.....	150
<u>CAPÍTULO VII - EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM ENGENHARIA.....</u>	152
<u>APÊNDICES.....</u>	168
A.I - Desenvolvimentos do Capítulo III.....	168
A.II - Desenvolvimentos do Capítulo IV.....	186
A.III - Descrição e Manual de Entrada do Programa SAND-AID	201
<u>BIBLIOGRAFIA.....</u>	214

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O interesse de projetistas e pesquisadores pela análise dinâmica estrutural vem crescendo cada vez mais nestes últimos anos. A complexidade de alguns projetos recentemente calculados no Brasil, tais como projetos de Plataformas Marítimas e Usinas Nucleares, requer que se proceda a uma análise dinâmica dos sistemas estruturais envolvidos. Além disto, as estruturas construídas atualmente são cada vez mais esbeltas, mais flexíveis e portanto mais suscetíveis aos efeitos dinâmicos.

Dois métodos de solução das equações diferenciais que definem o equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural são usados na prática: superposição modal e métodos de integração direta.

Entre estes últimos existem os métodos lineares (de 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> ordem de precisão): Método das Diferenças Centrais, de Newmark, de Wilson- $\theta$  e Hermitiano Linear e os métodos de ordem superior (de 3.<sup>a</sup> e 4.<sup>a</sup> ordem de precisão) formulados mais recentemente: Hermitianos Cúbicos I, II, III e IV.

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo comparativo das propriedades dos algoritmos acima citados, no que concerne estabilidade, precisão e eficiência computacional.

Os sistemas estruturais usados foram supostos lineares e foram discretizados pelo Método dos Elementos Finitos.

No Capítulo II são dadas noções de análise dinâmica estrutural e no Capítulo III são mostradas as formulações dos diversos algoritmos de integração direta. As propriedades dos algoritmos foram estudadas no Capítulo IV.

No Capítulo V encontram-se os esquemas computacionais dos algoritmos que foram comparados no Capítulo VI através de exemplos. O Capítulo VII mostra um exemplo de aplicação em Engenharia.

## CAPÍTULO II

### NOÇÕES DE ANÁLISE DINÂMICA ESTRUTURAL

#### II.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas definições básicas e as ferramentas necessárias ao desenvolvimento do trabalho em si. Para estudos mais detalhados destes assuntos pode-se consultar as referências (1) a (6).

Os sistemas estruturais apresentados neste trabalho foram supostos lineares geométrica e fisicamente, ou seja, os deslocamentos e as deformações específicas dos seus pontos foram admitidos pequenos e os seus materiais elástico-lineares.

O termo "*dinâmico*" refere-se à variação no tempo, diz-se por exemplo que uma carga é *dinâmica* quando a sua magnitude, direção ou posição variar com o tempo. A avaliação da carga ao longo do tempo pode ser feita de duas maneiras: determinística e não determinística (probabilística). No presente trabalho só serão estudadas as cargas determinísticas.

Na análise dinâmica de um sistema estrutural deve-se levar em conta a variação ao longo do tempo das cargas atuantes bem como das respostas, ou seja, deslocamentos e tensões, produzidas pelas cargas no sistema. Ao invés de ter-se uma resposta única, como na análise estática, tem-se então uma sucessão de

respostas ao longo do tempo.

No entanto deve-se ressaltar que uma carga dinâmica produzirá ou não uma resposta dinâmica dependendo da magnitude das forças de inércia em relação às outras forças que participam do equilíbrio do sistema. De uma maneira geral, se a carga variar rapidamente em relação ao período natural da estrutura, os efeitos dinâmicos devem ser levados em conta.

## II.2 - DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os sistemas mecânicos podem ser representados por modelos discretos ou contínuos. Quando o comportamento do sistema é definido a partir do comportamento de um número finito de pontos o modelo é dito discreto. Caso contrário, e se as propriedades mecânicas do sistema são funções contínuas de variáveis espaciais o modelo é dito contínuo.

No primeiro caso as equações de equilíbrio são ordinárias (a variável independente é o tempo) e no segundo elas são parciais (as variáveis independentes são o tempo e a posição).

A não ser para sistemas contínuos muito simples, não é possível obter-se soluções exatas para o sistema de equações diferenciais parciais que devem também satisfazer às condições de contorno. Buscam-se então soluções aproximadas através de técnicas de discretização espacial que transformam as equa-

ções diferenciais parciais em ordinárias no tempo, análogas às de um sistema discreto.

Os métodos de discretização consistem em aproximar a resposta do sistema contínuo ( $u$ ) por uma série da forma:

$$u(r) = \sum_{k=1}^{np} \alpha_k \cdot \phi_k(r) \quad (\text{II.1})$$

onde  $\alpha_k$  são parâmetros ajustáveis,  $\phi_k$  são funções de aproximação conhecidas e  $np$  é o número de parâmetros ( $u$  e  $\phi_k$  são funções da posição  $r$ ).

De acordo com o critério de escolha das funções de aproximação e de obtenção dos parâmetros ajustáveis, os métodos são chamados variacionais (por exemplo: Rayleigh-Ritz) ou residuais (por exemplo: Método de Colocação, Galerkin).

Estes métodos não foram aplicados diretamente por ser muito difícil escolher as funções de aproximação globais, que, além de satisfazer às condições de contorno, devem representar as características do sistema em todo seu domínio. Além disso, para melhorar as soluções aproximadas, deve-se aumentar cada vez mais o grau das funções de aproximação.

O Método dos Elementos Finitos conseguiu eliminar estes problemas aplicando as funções de aproximação dos métodos citados acima de uma maneira mais simples. Ele consiste em utiliz

zar as aproximações por partes, dividindo-se o domínio em regiões de dimensão finita chamadas elementos finitos e escolhendo funções que aproximem o comportamento localmente em cada região. Usando esta técnica as funções de aproximação adotadas serão mais simples e também para melhorar as soluções aproximadas basta efetuar uma subdivisão das regiões em novas regiões menores (refinar a malha de elementos finitos).

Seja por exemplo um problema bi-dimensional cujo domínio foi discretizado por  $n$  elementos interligados por pontos nodais e que possui apenas uma incógnita  $u$  para cada ponto nodal.

Escrevendo a equação (II.1) para cada elemento  $e$ , tem-se:

$$u = \sum_{k=1}^{np} \alpha_k^e \cdot \phi_k^e \quad (\text{II.2})$$

Que pode ser escrita sob a forma matricial:

$$u = \underline{\phi} \underline{\alpha} \quad (\text{II.3})$$

onde

$$\underline{\phi} = [\phi_1^e \quad \phi_2^e \quad \dots \quad \phi_{np}^e] \quad \text{e} \quad \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

No método dos Elementos Finitos os parâmetros ajustáveis  $\alpha_k^e$ , incógnitas da equação (II.2), são substituídos pelos valores de  $u$  nos pontos nodais da malha. Aplicando a expressão (II.3) nos pontos nodais do elemento, tem-se:

$$u^1 = \underline{A}^1 \underline{\alpha}$$

$$u^2 = \underline{A}^2 \underline{\alpha}$$

.....

$$u^{ne} = \underline{A}^{ne} \underline{\alpha}$$

onde  $ne$  = número de nós no elemento  $e$  e  $A^i$  é obtida substituindo as coordenadas  $x$  e  $y$  do nó  $i$  na função de forma  $\phi_i$ .

Em forma matricial tem-se:

$$\underline{u} = \underline{A} \underline{\alpha} \quad (II.5)$$

Se o número de nós no elemento  $e$  ( $ne$ ) for igual ao número de parâmetros ajustáveis ( $np$ ), a matriz  $A$  será quadrada e regular e portanto inversível:

$$\underline{\alpha} = \underline{A}^{-1} \underline{u} \quad (II.6)$$

Levando (II.6) em (II.3), vem:

$$u = \underline{\phi} \underline{A}^{-1} \underline{u} \quad \text{ou} \quad u = \underline{H} \underline{u} \quad (II.7)$$



onde

$$\underline{H} = \underline{\Phi} \underline{A}^{-1} \quad (\text{II.8})$$

Utilizando a expressão (II.7) obtém-se o valor de  $u$  em qualquer ponto  $(x, y)$  do elemento a partir de valores de  $u^i$  ou seja os valores de  $u$  nos pontos nodais do mesmo elemento que são as incógnitas do problema.

Esta formulação desenvolvida para problemas bi-dimensionais com apenas uma incógnita nodal pode ser generalizada para problemas uni, bi ou tri-dimensionais com uma ou mais incógnitas nodais podendo ser usada para qualquer tipo de elemento (triangular, quadrilátero, etc.).

O Método dos Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos pode ser formulado de quatro maneiras (modelos). Neste trabalho será utilizado o modelo compatível também chamado de método dos deslocamentos em que as incógnitas do problema ( $u$  da equação (II.1)) são deslocamentos.

Reescrevendo (II.7) para uma formulação geral:

$$\underline{U}^e = \underline{H}^e \underline{U} \quad (\text{II.9})$$

Quando se tratar, por exemplo, de um problema bi-dimensional discretizado por elementos triangulares com duas incógnitas por nó (deslocamentos  $u$  e  $v$ ), tem-se:

$$\underline{U}^e(x, y) = \underline{H}^e(x, y) \underline{U}$$

$$\underline{U}^e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad e \quad \underline{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando em (II.9) as fórmulas que definem as deformações específicas em função dos deslocamentos obtêm-se:

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \underline{U} \quad (\text{II.10})$$

Em geral, a relação entre tensões e deformações específicas é feita através da fórmula:

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \underline{\varepsilon}^e + \underline{\sigma}_I^e \quad (\text{II.11})$$

onde  $\underline{D}^e$  é a matriz de elasticidade do elemento  $e$  e  $\underline{\sigma}_I^e$  a matriz de tensões iniciais.

### II.3 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PELO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Seja um sistema, por exemplo um corpo sólido, solici-  
tado por forças de superfície  $f_S$ , de volume  $f_V$  e por forças  
concentradas  $F^i$ , sujeito a um estado de tensões inicial  $\sigma_I$ . Es-  
tas forças induzem o sistema a um estado de tensões  $\sigma$  em equilí-  
brio com as mesmas. Em correspondência ao estado de tensões have-  
rá um estado de deformações  $\epsilon$  e um campo de deslocamentos  $U$  que  
definem a configuração deformada do sistema. Suponha-se que se  
adicione a esta configuração deformada um estado de deformações  
 $\delta U$  fictício e que o campo de deslocamentos resultante  $(U + \delta U)$   
continue satisfazendo às condições de contorno. Nestas condições  
o trabalho desenvolvido pelas forças internas será igual ao das  
externas:

$$\delta W_i = \delta W_e$$

ou seja,

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma \, dV = \int_V \delta U^T f_V \, dV + \int_S \delta U^T f_S \, dS + \sum_i \delta U^{iT} F^i \quad (II.12)$$

Discretizando o corpo sólido em  $n$  elementos fini-  
tos interligados por pontos nodais nos contornos dos elementos e  
admitindo que as forças concentradas estejam aplicadas nos pontos  
nodais, pode-se reescrever (II.12):

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^n \int_{V^e} \delta \underline{\varepsilon}^{eT} \underline{\sigma}^e dV^e &= \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \delta \underline{U}^{eT} \underline{f}_V^e dV^e + \\
&+ \sum_{e=1}^n \int_{S^e} \delta \underline{U}^{eT} \underline{f}_S^e dS^e + \sum_i \delta U^i F^i
\end{aligned} \quad (II.13)$$

De (II.9), vem:

$$\delta \underline{U}^e = \underline{H}^e \delta \underline{U} \quad \dots \quad \delta \underline{U}^{eT} = \delta \underline{U}^T \underline{H}^{eT} \quad (II.14)$$

e de (II.10):

$$\delta \underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \delta \underline{U} \quad \dots \quad \delta \underline{\varepsilon}^{eT} = \delta \underline{U}^T \underline{B}^{eT} \quad (II.15)$$

Substituindo (II.14), (II.15) e (II.11) em (II.13)

vem:

$$\begin{aligned}
\delta \underline{U}^T \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}^e \underline{B}^e \underline{U} dV^e &= \delta \underline{U}^T \left[ \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{H}^{eT} \underline{f}_V^e dV^e + \right. \\
&+ \left. \sum_{e=1}^n \int_{S^e} \underline{H}^{eT} \underline{f}_S^e dS^e - \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{g}_I^e dV^e \right] + \delta \underline{U}^T \underline{F}
\end{aligned} \quad (II.16)$$

Admitindo que  $\delta \underline{U}^T$  é arbitrário pode-se simplificar

(II.16):

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{R} \quad (II.17)$$

onde  $\underline{K} = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}^e \underline{B}^e dV^e$  é a matriz de rigidez do conjunto dos elementos

e  $\underline{R} = \underline{R}_V + \underline{R}_S - \underline{R}_I + \underline{R}_C$  é o vetor de forças externas que inclui:

$$\underline{R}_V = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{H}^{eT} \underline{f}_V^e dV^e \quad (II.18)$$

vetor de forças de volume

$$\underline{R}_S = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{H}^{eT} \underline{f}_S^e dS^e \quad (II.19)$$

vetor de forças de superfície

$$\underline{R}_I = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{g}_I^e dV^e \quad (II.20)$$

efeito das tensões iniciais

$$\underline{R}_C = \underline{F} \quad (II.21)$$

vetor de cargas concentradas

As equações (II.17) definem o equilíbrio estático do conjunto de elementos, o problema dinâmico pode ser formulado incluindo-se nas forças externas as forças de inércia definidas por d'Alembert, bem como as forças de amortecimento que são representadas por um amortecimento viscoso equivalente que cause a mesma quantidade de dissipação de energia.

Admitindo que as velocidades e acelerações foram aproximadas da mesma maneira que os deslocamentos (eq. (II.9)), pode-se reescrever (II.18):

$$\underline{R}_V^* = \sum_{e=1}^n \int \underline{H}^{eT} [\underline{f}_V^e - \rho^e \underline{H}^e \ddot{\underline{U}} - c^e \underline{H}^e \dot{\underline{U}}] dV^e \quad (\text{II.22})$$

Reescrevendo então (II.17), temos as equações de equilíbrio para problemas dinâmicos:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{R} \quad (\text{II.23})$$

onde

$$\underline{M} = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \rho^e \underline{H}^{eT} \underline{H}^e dV^e \quad (\text{II.24})$$

é a matriz de massa do conjunto dos elementos e  $\rho^e$  é a massa específica do elemento  $\underline{e}$ ;

$$\underline{C} = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} c^e \underline{H}^{eT} \underline{H}^e dV^e \quad (\text{II.25})$$

é a matriz de amortecimento do conjunto dos elementos e  $c^e$  é a constante de amortecimento do elemento  $\underline{e}$ .

e onde  $\underline{U} = \underline{U}(t)$

$$\dot{\underline{U}} = \dot{\underline{U}}(t)$$

$$\ddot{\underline{U}} = \ddot{\underline{U}}(t)$$

$$\underline{R} = \underline{R}(t)$$

## II.4 - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio (II.23) matematicamente representam um sistema de equações diferenciais de 2.<sup>a</sup> ordem cuja variável independente é o tempo. Os métodos usuais de solução de equações diferenciais a coeficientes constantes podem ser aplicados para resolução de (II.23), mas, como geralmente a ordem das matrizes é muito grande, isto implicaria num custo excessivo.

Os métodos de solução de (II.23) mais eficientes e mais utilizados na prática dividem-se em dois tipos: superposição modal e métodos de integração direta.

### II.4.1 - Métodos de Integração Direta

Os métodos de integração direta são assim chamados por utilizarem procedimentos numéricos etapa por etapa na integração das equações (II.23). Nenhuma transformação destas equações é realizada, portanto a integração é dita direta.

O objetivo destes métodos é de satisfazer as equações de equilíbrio (II.23) em intervalos de tempo  $\Delta t$  discretos em vez de satisfazê-las em qualquer instante  $t$ . Trata-se então de resolver sistemas de equações algébricas, que incluem o efeito das forças de inércia e de amortecimento a cada instante discreto dentro do intervalo de solução. Nos métodos diretos adota-se uma variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações dentro de cada intervalo de tempo  $\Delta t$ . É a forma desta variação

que vai definir a estabilidade e a precisão de cada algoritmo. O esforço computacional de cada algoritmo dependerá da forma desta variação e também do tipo de implementação.

Os métodos de integração direta dividem-se em explícitos e implícitos. Quando não for necessário resolver-se um sistema de equações (no caso em que a matriz  $\underline{A}$  da Eq. (II.27) for diagonal) a cada etapa os métodos são ditos explícitos, caso contrário eles são ditos implícitos. Como exemplos de métodos explícitos pode-se citar o Método das Diferenças Centrais (ref. (2)) e o Método Iterativo de Argyris (ref. (7)) que utiliza interpolação cúbica das forças de inércia. Entre os métodos implícitos pode-se citar o Método de Newmark (ref. (2)), o de Wilson- $\theta$  (ref. (10)) e os Hermitianos em geral (ref. (8)-(9)).

Escrevendo (II.23) para um instante discreto  $\tau$  dentro do intervalo de solução ( $\tau \in [0, T]$ ), tem-se:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_{\tau} + \underline{C} \dot{\underline{U}}_{\tau} + \underline{K} \underline{U}_{\tau} = \underline{R}_{\tau} \quad (\text{II.26})$$

Dependendo do método,  $\tau$  pode ser igual a  $t$ ,  $t+\Delta t$ ,  $t+\theta\Delta t$ , etc.

Supõe-se que os deslocamentos, velocidades e acelerações iniciais ( $\underline{U}_0$ ,  $\dot{\underline{U}}_0$ ,  $\ddot{\underline{U}}_0$ ) são conhecidos e geralmente divide-se o intervalo de solução em  $n$  intervalos iguais  $\Delta t = T/n$ .



Substituindo as variações dos deslocamentos, velocidades e acelerações em (II.26) chega-se a um sistema de equações da forma geral:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (\text{II.27})$$

onde  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{X}$  dependem do esquema de integração de cada método.

De uma maneira geral:

$\underline{X}$  é o vetor de incógnitas (que geralmente são deslocamentos mas também podem ser acelerações) no instante  $t+\Delta t$ ;

$\underline{A}$  é a matriz de rigidez efetiva (ou de massa efetiva no caso em que o vetor de incógnitas  $\underline{X}$  for um vetor de acelerações);

$\underline{B}$  é o vetor de cargas efetivo que é função das cargas externas no instante  $\tau(R_T)$  e do produto das matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  pelas soluções anteriores.

Resolvendo o sistema (II.27) obtêm-se o vetor de deslocamentos e a partir deste os vetores de velocidades e acelerações no instante  $t+\Delta t$ . Cada método de integração direta gera assim um algoritmo geral que obtém soluções em  $t+\Delta t$  a partir de soluções conhecidas em  $0, \Delta t, \dots, t$ , obtendo desta forma as soluções aproximadas em todos os instantes discretos do intervalo de solução (de  $0$  a  $T$ ).

#### II.4.2 - Superposição Modal

O método de superposição modal consiste em transformar as equações de equilíbrio (II.23) numa forma mais simples antes de se efetuar uma integração direta. Transformando o vetor de deslocamentos:

$$\underline{U}(t) = \underline{P} \underline{X}(t) \quad (\text{II.28})$$

onde  $\underline{P}$  é uma matriz quadrada a ser determinada e  $\underline{X}(t)$  é um vetor dependente do tempo de ordem  $n$ .

Substituindo (II.28) em (II.23) e pré-multiplicando por  $\underline{P}^T$ , vem:

$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{X}}(t) + \underline{\tilde{C}} \dot{\underline{X}}(t) + \underline{\tilde{K}} \underline{X}(t) = \underline{\tilde{R}}(t) \quad (\text{II.29})$$

$$\text{onde } \underline{\tilde{M}} = \underline{P}^T \underline{M} \underline{P} \quad \underline{\tilde{C}} = \underline{P}^T \underline{C} \underline{P}$$

$$\underline{\tilde{K}} = \underline{P}^T \underline{K} \underline{P} \quad \underline{\tilde{R}}(t) = \underline{P}^T \underline{R}(t)$$

O objetivo desta transformação é que as novas matrizes  $\underline{\tilde{K}}$ ,  $\underline{\tilde{M}}$  e  $\underline{\tilde{C}}$  tenham uma largura de banda menor do que as anteriores.

Existem várias matrizes  $\underline{P}$  que podem diminuir a largura de banda das matrizes do sistema. Na prática utiliza-se a matriz de auto-vetores do problema de auto-valor.

$$\underline{K} \underline{\phi} = \omega^2 \underline{M} \underline{\phi} \quad (\text{II.30})$$

que é obtido da solução das equações de vibração livre não amortecidas:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{0} \quad (\text{II.31})$$

cujas soluções são:

$$\underline{U} = \underline{\phi} e^{-i\omega t} \quad (\text{II.32})$$

onde  $\underline{\phi}$  é um vetor de ordem  $n$  e  $\omega$  representa a frequência de vibração associada ao vetor  $\underline{\phi}$ . Substituindo (II.32) em (II.31) chega-se a (II.30).

O problema de auto-valor (II.30) terá  $n$  soluções  $(\omega_1^2, \underline{\phi}_1) \dots (\omega_n^2, \underline{\phi}_n)$ . Pode-se demonstrar facilmente (ver refs. (1) e (6)) que os auto-vetores  $\underline{\phi}$  são ortogonais à matriz  $\underline{M}$  e conseqüentemente à matriz  $\underline{K}$ , desde que  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  sejam simétricas. Normalizando os auto-vetores em relação à matriz  $\underline{M}$ , tem-se:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Chama-se  $\underline{\phi}_i$  - vetor de forma do modo  $i$  ou modo  $i$ , e  $\omega_i$  - frequência própria do modo  $i$ .

Definindo  $\underline{\Phi}$  - matriz formada pelos auto-vetores ortonormalizados em relação à  $\underline{M}$  nas colunas e  $\underline{\Omega}^2$  - matriz formada

pelos auto-valores  $\omega_i^2$  na diagonal, pode-se reescrever (II.28):

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad (\text{II.34})$$

Tendo em vista (II.33), tem-se:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad (\text{II.35})$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{I}} \quad (\text{II.36})$$

Admitindo que as condições de ortogonalidade também se aplicam à matriz  $\underline{\underline{C}}$  (ver item II.5.2) tem-se:

$$\underline{\underline{\Phi}}_i^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}}_j = \begin{cases} c_i/m_i = 2 \xi_i \omega_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

onde  $\xi_i$  é a taxa de amortecimento do modo  $i$  ( $\xi_i = c_i/c_{cr} = c_i/2m_i\omega_i$ ).

Agora vê-se a vantagem de se usar a matriz  $\underline{\underline{\Phi}}$  como a matriz de transformação  $\underline{\underline{P}}$ :

$$\underline{\underline{U}}(t) = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{X}}(t) \quad (\text{II.38})$$

Substituindo (II.38) em (II.23):

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \ddot{\underline{\underline{X}}}(t) + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} \dot{\underline{\underline{X}}}(t) + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{R}}(t)$$

Levando em conta (II.35) a (II.37):

$$\ddot{\underline{X}}(t) + [2\xi_i \omega_i] \dot{\underline{X}}(t) + \underline{\omega}^2 \underline{X}(t) = \underline{\phi}^T \underline{R}(t) \quad (\text{II.39})$$

Usando a matriz  $\underline{\phi}$  como matriz de transformação consegue-se desacoplar o sistema de equações (II.23) em  $n$  equações:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \phi_i^T \underline{R}(t) \quad (\text{II.40})$$

Cada equação (II.40) representa um modo de vibração e o auto-vetor  $\phi_i$  deve ser ortonormalizado em relação à  $\underline{M}$ .

A solução de cada equação (II.40) pode ser obtida pela integral de Duhamel, pelos métodos de integração direta ou então usando a Transformada de Fourier (domínio da frequência).

A priori é meio difícil dizer quando a utilização do método de superposição modal é conveniente.

Sendo o número de operações dos métodos de integração direta proporcional ao número de etapas ( $\alpha_1 \cdot n \cdot \ell f \cdot s$  para os métodos lineares e  $\alpha_2 \cdot n^2 \cdot s$  para os cúbicos onde  $\ell f$  é a largura da semi-banda da matriz de rigidez,  $s$  o número de etapas e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dependem do método e das matrizes da estrutura) convém utilizá-los nos problemas de curta duração. Geralmente quando a integração deve ser efetuada para muitas etapas convém transformar as equações (II.23) em  $n$  equações (II.40), o que reduziria  $\ell f$  vezes (ou  $n$  vezes) o número de operações.

Deve-se levar em conta, no entanto, que o esforço computacional necessário ao cálculo de auto-valores e auto-vetores no método de superposição modal é geralmente maior do que o esforço computacional necessário à triangularização da matriz de rigidez efetiva. Nos casos porém em que apenas os primeiros modos participam da solução do problema, como é o caso dos problemas de propagação de ondas, será melhor usar o método de superposição modal. Já nos problemas de impacto, em que todos os modos participam da solução e o interesse da resposta é de curta duração é mais conveniente usar os métodos de integração direta.

De uma maneira geral, para problemas de análise dinâmica não linear os métodos de integração direta também têm se mostrado mais eficientes.

O presente trabalho limita-se ao estudo dos métodos de integração direta para a análise dinâmica linear, especialmente os métodos implícitos que serão vistos no próximo capítulo.

## II.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE AS MATRIZES DE MASSA E DE AMORTECIMENTO

### II.5.1 - Matriz de Massa Discreta e Agrupada - Ver referências (1), (6) e (18)

A matriz de massa de uma estrutura definida na Eq. (2.24) é chamada matriz de massa consistente por utilizar no

seu cálculo as mesmas funções de interpolação usadas no cálculo da matriz de rigidez.

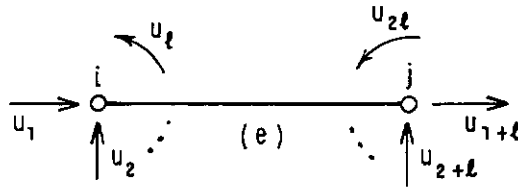
Uma outra maneira de se calcular a matriz de massa é considerar toda a massa concentrada nos nós aonde são definidos os graus de liberdade da estrutura. A massa concentrada em cada nó será a soma das contribuições nodais de cada elemento ligado ao nó, sendo a distribuição de massa dos elementos para os nós calculada pela estática. Desta forma tem-se uma matriz de massa diagonal chamada matriz de massa discreta onde cada elemento da diagonal corresponde a um grau de liberdade. Quando despreza-se o efeito da inércia rotacional os elementos da diagonal da matriz de massa discreta correspondentes aos graus de liberdade de rotação serão nulos e a matriz de massa deixa de ser positiva definida o que nem sempre é conveniente. Neste caso, o melhor é efetuar uma condensação estática dos graus de liberdade de rotação o que inclusive torna o problema mais econômico.

Um outro tipo de matriz de massa é a matriz de massa agrupada que é calculada transformando a matriz de massa consistente em diagonal proporcionalmente aos elementos da diagonal.

Uma outra técnica para transformar a matriz de massa consistente em diagonal é a seguinte:

Seja um elemento (e) reticulado ligado pelos nós  $i$  e  $j$  nos seus extremos e que possui  $\ell$  graus de liberdade por

não.



Calculam-se os elementos da matriz de massa diagonal a partir da consistente pelas relações:

$$\begin{aligned}
 m_{k,k}^{(d)} &= \alpha (m_{k,k}^{(c)} + m_{k,k+\ell}^{(c)}) & k \leq \ell \\
 m_{k,k}^{(d)} &= \alpha (m_{k,k-\ell}^{(c)} + m_{k,k}^{(c)}) & k > \ell
 \end{aligned}
 \tag{II.41}$$

Adota-se para a maioria dos problemas  $\alpha = 1$  (ver ref. (18)).

No presente trabalho foram usadas tanto a matriz de massa consistente como a agrupada, calculada pela última técnica vista acima, e não foi desprezado o efeito da inércia rotacional.

Quando utiliza-se um método explícito na resolução das equações de equilíbrio é mais conveniente optar pela matriz de massa discreta ou agrupada como veremos no próximo capítulo.



## II.5.2 - Matriz de Amortecimento Proporcional (ver referências (1) e (2))

No item II.4.1 admitiu-se que as condições de ortogonalidade também eram aplicáveis à matriz de amortecimento  $\underline{C}$ , ou seja, a mesma transformação usada para desacoplar as forças elásticas e de inércia também serve para desacoplar as forças de amortecimento. Rayleigh mostrou que uma matriz de amortecimento da forma

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (\text{II.42})$$

ou seja, proporcional às matrizes de rigidez e de massa, atenderá sempre às condições de ortogonalidade. Para demonstrar isto basta aplicar a operação de ortogonalidade em ambos os lados da eq. (II.42). Existem várias outras matrizes de amortecimento que estão relacionadas com as matrizes de rigidez e de massa que também atendem às condições de ortogonalidade.

Neste trabalho será utilizada a matriz de amortecimento dada por Rayleigh, ou então a matriz de amortecimento será considerada nula: por simplicidade ou nos problemas de curta duração em que não há tempo para as forças de amortecimento se desenvolverem.

### CAPÍTULO III

#### FORMULAÇÃO DOS ALGORITMOS

Neste capítulo serão mostradas as formulações dos vários algoritmos de integração direta para a resolução do sistema (nxn) de equações diferenciais da análise dinâmica estrutural:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{R} \quad (\text{III.1})$$

#### III.1 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS (M.D.C.)

Este método já é amplamente conhecido na análise estática e pode ser bastante eficiente em alguns problemas da análise dinâmica (ver Ref. (2)).

Consideram-se as equações de equilíbrio (III.1) no instante t:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_t + \underline{C} \dot{\underline{U}}_t + \underline{K} \underline{U}_t = \underline{R}_t \quad (\text{III.2})$$

Supõem-se as seguintes leis de variação para as acelerações e velocidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\underline{U}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\underline{U}_{t-\Delta t} - 2\underline{U}_t + \underline{U}_{t+\Delta t}) \\ \dot{\underline{U}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (-\underline{U}_{t-\Delta t} + \underline{U}_{t+\Delta t}) \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

$$(\text{III.4})$$

O erro nas expressões acima é da ordem de  $(\Delta t)^2$ .

Substituindo as equações (III.3) e (III.4) em (III.2) chega-se a solução para o vetor de deslocamentos no instante  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{M}} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{U}}_{t+\Delta t} = & \underline{\underline{R}}_t - \left( \underline{\underline{K}} - \frac{2}{\Delta t^2} \underline{\underline{M}} \right) \underline{\underline{U}}_t - \\ & - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{M}} - \frac{1}{2\Delta t} \underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{U}}_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

ou então:

$$\underline{\underline{\hat{K}}} \underline{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \underline{\underline{\hat{R}}}_t \quad (\text{III.6})$$

onde  $\underline{\underline{\hat{K}}}$  é a matriz de rigidez efetiva e

$\underline{\underline{\hat{R}}}$  é o vetor de cargas efetivo.

Resolvido o sistema (III.6) obtém-se o vetor de deslocamentos  $\underline{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e, a partir deste,  $\ddot{\underline{\underline{U}}}_t$  e  $\dot{\underline{\underline{U}}}_t$  pelas equações (III.3) e (III.4).

Observa-se que para o cálculo de  $\underline{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  deve-se conhecer  $\underline{\underline{U}}_{t-\Delta t}$  o que implica em usar um esquema especial de partida:

$$\underline{\underline{U}}_{-\Delta t} = \underline{\underline{U}}_0 - \Delta t \dot{\underline{\underline{U}}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\underline{\underline{U}}}_0$$

que se obtêm fazendo  $t = 0$  em (III.3).

Este método torna-se vantajoso no caso em que não há amortecimento físico, ou seja, a matriz de amortecimento é nula, e quando a matriz de massa é diagonal. Neste caso o método é dito explícito pois não é necessário resolver o sistema (III.6), obtêm-se diretamente o vetor de deslocamentos:

$$\frac{1}{\Delta t^2} M \tilde{U}_{t+\Delta t} = \hat{R}_t$$

$$U_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \hat{R}_t^{(i)} \quad (\text{III.7})$$

onde  $i$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade e supõe-se que  $m_{ii} > 0$ .

A grande desvantagem deste método é que ele é condicionalmente estável, ou seja, só é estável quando usa-se  $\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi}$ , onde  $T_n$  representa o menor período da estrutura ( $n$  é o número de graus de liberdade). O conceito de estabilidade será visto no capítulo IV, item IV.2. Uma outra desvantagem do método é a necessidade de um esquema especial de partida.

### III.2 - MÉTODO DE WILSON $\theta$

Este método (ver ref. (2)), é basicamente uma extensão do método de aceleração linear (ver ref. (1) e (10)) e pertence à família dos métodos de colocação (ver ref. (12)), o equilíbrio é "colocado" no instante  $t + \theta \Delta t$  ( $\theta \geq 1$ ) de forma a

tornar o método de aceleração linear incondicionalmente estável. Para que isto aconteça deve-se usar  $\theta \geq 1,37$ , como será visto no item IV.2.2. Costuma-se usar na prática  $\theta = 1,4$  e quando  $\theta = 1,0$  o método recai no método de aceleração linear.

Supõe-se a seguinte lei de variação para as acelerações:

$$\ddot{u}_{t+\tau} = \ddot{u}_t + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (\text{III.8})$$

onde  $\tau$  representa a variação no tempo dentro do intervalo considerado:  $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ .

Integrando (III.8) de  $t$  a  $t + \tau$ , obtém-se:

$$\dot{u}_{t+\tau} = \dot{u}_t + \ddot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (\text{III.9})$$

E integrando (III.9):

$$u_{t+\tau} = u_t + \dot{u}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_t \tau^2 + \frac{1}{6\theta \Delta t} \tau^3 (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (\text{III.10})$$

Escrevendo (III.9) e (III.10) para o instante  $t + \theta \Delta t$  vem:

$$\dot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\underline{U}}_t) \quad (\text{III.11})$$

$$\underline{U}_{t+\theta\Delta t} = \underline{U}_t + \theta\Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\underline{U}}_t) \quad (\text{III.12})$$

Explicitando  $\ddot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t}$  na equação (III.12), vem:

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (\underline{U}_{t+\theta\Delta t} - \underline{U}_t) - 2\dot{\underline{U}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\underline{U}}_t \quad (\text{III.13})$$

As equações de equilíbrio (III.1) são consideradas no instante  $t + \theta\Delta t$ :

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} + \underline{K} \underline{U}_{t+\theta\Delta t} = \underline{R}_{t+\theta\Delta t} \quad (\text{III.14})$$

Extrapolando  $\underline{R}_{t+\theta\Delta t}$  tem-se:

$$\underline{R}_{t+\theta\Delta t} = \underline{R}_t + \theta(\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{R}_t) \quad (\text{III.15})$$

Substituindo as equações (III.11) e (III.13) em (III.14) vem:

$$\begin{aligned} \left( \underline{K} + \frac{6}{\theta\Delta t^2} \underline{M} + \frac{3}{\theta\Delta t} \underline{C} \right) \underline{U}_{t+\theta\Delta t} = & \underline{R}_{t+\theta\Delta t} + \underline{M} \left( \frac{6}{\theta\Delta t^2} \underline{U}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\underline{U}}_t + 2\ddot{\underline{U}}_t \right) \\ & + \underline{C} \left( \frac{3}{\theta\Delta t} \underline{U}_t + 2\dot{\underline{U}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\underline{U}}_t \right) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

ou então:

$$\hat{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t} = \hat{\underline{\underline{R}}}_{t+\theta\Delta t} \quad (\text{III.17})$$

onde  $\hat{\underline{\underline{K}}}$  é a matriz de rigidez efetiva e

$\hat{\underline{\underline{R}}}_{t+\theta\Delta t}$  é o vetor de cargas efetivo

Resolvendo o sistema (III.17) obtém-se o vetor de deslocamentos  $\underline{\underline{U}}_{t+\theta\Delta t}$  e, a partir deste,  $\ddot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t}$  e  $\underline{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  pelas equações (III.13), (III.11) e (III.12) respectivamente.

Como já foi dito anteriormente, este é um método implícito pois deve-se resolver um sistema de equações a cada etapa.

### III.3 - MÉTODO DE NEWMARK

Este método (ver ref. (2)) também é uma extensão do método de aceleração linear. São usados dois parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  para interpolar as acelerações determinados de modo a obter-se estabilidade e precisão. As seguintes expressões são adotadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{\underline{U}}}_t + [(1-\delta) \ddot{\underline{\underline{U}}}_t + \delta \ddot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t}] \Delta t \\ \underline{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \underline{\underline{U}}_t + \dot{\underline{\underline{U}}}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\underline{\underline{U}}}_t + \alpha \ddot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{\underline{U}}}_t + [(1-\delta) \ddot{\underline{\underline{U}}}_t + \delta \ddot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t}] \Delta t \\ \underline{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \underline{\underline{U}}_t + \dot{\underline{\underline{U}}}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\underline{\underline{U}}}_t + \alpha \ddot{\underline{\underline{U}}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Quando  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/6$  o método recai no método de aceleração linear. Para que o método seja incondicionalmente

estável deve-se ter  $\delta \geq 0,5$  e  $\alpha \geq 0,25 (0,5 + \delta)^2$ , como será visto no item IV.2.3.

Para  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$  o método é chamado de método de aceleração média constante ou de regra trapezoidal, que é o mais usado na prática.

As equações de equilíbrio (III.1) são consideradas no instante  $t + \Delta t$ :

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{K} \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{R}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.20})$$

Explicitando  $\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  na equação (III.19) vem:

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\underline{U}}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \underline{U}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.21})$$

Introduzindo a equação (III.21) em (III.18) vem:

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \underline{U}_t + \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \dot{\underline{U}}_t + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \Delta t \ddot{\underline{U}}_t + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \underline{U}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.22})$$

Substituindo as equações (III.21) e (III.22) em (III.20) tem-se:



$$\left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \underline{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \underline{C} + \underline{K} \right) \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{R}_{t+\Delta t} + \underline{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\underline{U}_t + \dot{\underline{U}}_t \Delta t) + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\underline{U}}_t \right] + \underline{C} \left[ \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \underline{U}_t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\underline{U}}_t + \left( \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \ddot{\underline{U}}_t \right] \quad (\text{III.23})$$

ou então:

$$\hat{\underline{K}} \underline{U}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.24})$$

onde  $\hat{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez efetiva e

$\hat{\underline{R}}_{t+\Delta t}$  é o vetor de cargas efetivo.

Resolvendo o sistema (III.24) obtém-se o vetor de deslocamentos  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  e a partir deste obtém-se  $\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  pelas equações (III.21) e (III.18).

Este método é implícito pois deve-se resolver o sistema (III.24) a cada etapa e também pode ser formulado de uma outra maneira usando as acelerações como incógnitas em vez dos deslocamentos (ver ref. (14)).

#### III.4 - ALGORITMOS HERMITIANOS

Os algoritmos hermitianos caracterizam-se pela utilização de polinômios de Hermite para interpolação das incógnitas. O hermitiano linear utiliza interpolação linear dos deslocamentos assim como das forças externas e os hermitianos cúbicos podem ser formulados utilizando interpolação cúbica dos des

locamentos (com interpolação linear ou cúbica das forças externas) ou das forças de inércia.

Serão mostradas neste trabalho as formulações de quatro algoritmos hermitianos cúbicos (I, II, III e IV), todos eles implícitos, exceto o primeiro (I) que é explícito no caso em que a matriz de massa é diagonal.

Com exceção do algoritmo hermitiano cúbico I (que utiliza interpolação cúbica das forças de inércia), os algoritmos hermitianos são formulados para sistemas de equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem. Deve-se então transformar o sistema de 2.<sup>a</sup> ordem (III.1) num sistema de 1.<sup>a</sup> ordem equivalente:

$$\underline{B}_1 \dot{\underline{Y}} + \underline{B}_2 \underline{Y} = \underline{P} \quad (\text{III.25})$$

ou então:

$$\dot{\underline{Y}} = - \underline{A}_2 \underline{Y} + \underline{\bar{P}} \quad (\text{III.26})$$

com

$$\underline{A}_2 = \underline{B}_1^{-1} \underline{B}_2 \quad (\text{III.27})$$

e onde  $\underline{\bar{P}}$  representa  $\underline{B}_1^{-1} \underline{P}$ .

Os novos vetores são definidos da seguinte forma:

$$\dot{\underline{Y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{U}} \\ \dot{\underline{U}} \end{Bmatrix} ; \underline{Y} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{U}} \\ \underline{U} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{P} = \begin{Bmatrix} \underline{R} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

E as matrizes  $\underline{B}_1$  e  $\underline{B}_2$  ( $2n \times 2n$ ):

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} \underline{M} & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

#### III.4.1 - Algoritmo Hermitiano Linear

Este algoritmo utiliza interpolação linear dos deslocamentos: (ver ref. (9))

$$\underline{Y} = w_t \underline{Y}_t + w_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.30})$$

onde  $w_t = 1 - \zeta$ ,  $w_{t+\Delta t} = \zeta$  e  $\zeta = \frac{t}{\Delta t}$

Substituindo as expressões de  $w_t$  e  $w_{t+\Delta t}$  em (III.30) e derivando em relação a  $t$ , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\underline{Y}} = \frac{1}{\Delta t} (\underline{Y}_{t+\Delta t} - \underline{Y}_t) \\ \underline{Y} = (1 - \zeta) \underline{Y}_t + \zeta \underline{Y}_{t+\Delta t} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

$$\underline{Y} = (1 - \zeta) \underline{Y}_t + \zeta \underline{Y}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.32})$$

(lembrando que  $\dot{\underline{Y}} = \frac{d\underline{Y}}{dt} = \frac{d\underline{Y}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt}$  e  $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\Delta t}$ )

Este algoritmo é incondicionalmente estável para  $\zeta \geq 1/2$ , a ser visto no item IV.2.4.

As forças externas também são interpoladas linearmente:

$$\underline{P} = w_t \underline{P}_t + w_{t+\Delta t} \underline{P}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.33})$$

Introduzindo as equações (III.31), (III.32) e (III.33) em (III.26) vem:

$$\begin{aligned} (\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A}_2) \underline{Y}_{t+\Delta t} &= (\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A}_2) \underline{Y}_t + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{P}}_t - \\ &- \beta_1 \Delta t \underline{\bar{P}}_t \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

onde  $\alpha_1 = \zeta$ ,  $\beta_1 = \zeta - 1$  e  $\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} = \underline{B}_1^{-1} \underline{P}_{t+\Delta t}$ ,  $\underline{\bar{P}}_t = \underline{B}_1^{-1} \underline{P}_t$

O sistema (III.34) ( $2n \times 2n$ ) pode ser escrito na forma:

$$\underline{1} \underline{\bar{B}}_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} = \underline{1} \underline{\bar{B}}_t \underline{Y}_t + \Delta \underline{\bar{P}}_1 \quad (\text{III.35})$$

Manipulando as equações (III.27), (III.28), (III.29), (III.34) e (III.35) (ver Apêndice AI.1) chega-se à:

$$\begin{aligned} (\underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1^2 \Delta t^2 \underline{K}) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} &= (\underline{M} + \beta_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1 \beta_1 \Delta t^2 \underline{K}) \dot{\underline{U}}_t - \\ - \Delta t \underline{K} \underline{U}_t + \alpha_1 \Delta t \underline{R}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \underline{R}_t \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

e

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = \alpha_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \underline{U}_t \quad (\text{III.37})$$

Substituindo a equação (III.36) em (III.37) tem-se:

$$\begin{aligned} (\underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1^2 \Delta t^2 \underline{K}) \underline{U}_{t+\Delta t} &= \Delta t \underline{M} \dot{\underline{U}}_t + \\ &+ (\underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1 \beta_1 \Delta t^2 \underline{K}) \underline{U}_t + \alpha_1^2 \Delta t^2 \underline{R}_{t+\Delta t} - \alpha_1 \beta_1 \Delta t^2 \underline{R}_t \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Obs.:  $\beta_1 - \alpha_1 = -1$  e  $-\alpha_1 + \alpha_1^2 = \alpha_1 \beta_1$

Obteve-se então dois sistemas de equações  $n \times n$  (III.36) e (III.38)) com o lado esquerdo das equações iguais, logo só é necessário montar e fatorar uma matriz de rigidez efetiva. Na prática resolve-se o sistema (III.38) obtendo o vetor de deslocamentos  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  e a partir deste, pela equação (III.37), obtêm-se diretamente  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$ .

Reescrevendo (III.38):

$$\hat{\underline{K}} \underline{U}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.39})$$

onde  $\hat{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez efetiva e

$\hat{\underline{R}}_{t+\Delta t}$  é o vetor de cargas efetivo

Para  $\zeta = 1/2$  este algoritmo equivale à regra trapezoidal que é o Método de Newmark para  $\delta = 1/2$  e  $\alpha = 1/4$ .

#### III.4.2 - Algoritmo Hermitiano Cúbico I

Reescrevendo a equação (III.1), tem-se:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} = \underline{F} = \underline{R} - \underline{K} \underline{U} - \underline{C} \dot{\underline{U}} \quad (\text{III.40})$$

Este algoritmo (desenvolvido por Argyris e outros autores, ver ref. (7)) baseia-se na interpolação cúbica das forças de inércia:

$$\underline{F} = w_t \underline{F}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{F}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{F}_{t+\Delta t} + \Delta t \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.41})$$

onde  $\zeta = \frac{t}{\Delta t}$  . . .  $t = \Delta t \zeta$  e  $dt = \Delta t d\zeta$  e onde

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ \bar{w}_t = \zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3 \\ w_{t+\Delta t} = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\ \bar{w}_{t+\Delta t} = -\zeta^2 + \zeta^3 \end{array} \right. \quad (\text{III.42})$$

De (III.40), tem-se:

$$\ddot{\underline{U}} = \underline{M}^{-1} \underline{F} \quad (\text{III.43})$$

Integrando (III.43) duas vêzes encontram-se duas equações que, manipuladas com as equações (III.41) e (III.42) (ver Apêndice AI.2) vão definir as leis de variação dos deslocamentos e velocidades:

$$\begin{cases} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + \frac{\Delta t}{12} \underline{M}^{-1} (6\underline{F}_t + \Delta t \dot{\underline{F}}_t + 6\underline{F}_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}) \\ \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{60} \underline{M}^{-1} (21\underline{F}_t + 3\Delta t \dot{\underline{F}}_t + 9\underline{F}_{t+\Delta t} - 2\Delta t \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.44)} \\ \text{(III.45)} \end{matrix}$$

Este algoritmo é condicionalmente estável mas pode ser transformado em incondicionalmente estável modificando os parâmetros multiplicadores das forças de inércia na equação (III.45) como será visto no item IV.2.5.

A implementação deste algoritmo é feita de modo iterativo. De (III.44) e (III.45) vem:

$$d\dot{\underline{U}} = \frac{\Delta t}{12} \underline{M}^{-1} (6\underline{F}_t + \Delta t \dot{\underline{F}}_t + 6\underline{F}_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}) \quad \text{(III.46)}$$

e

$$d\underline{U} = \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{60} \underline{M}^{-1} (21\underline{F}_t + 3\Delta t \dot{\underline{F}}_t + 9\underline{F}_{t+\Delta t} - 2\Delta t \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}) \quad \text{(III.47)}$$

$$(\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + d\dot{\underline{U}} \text{ e } \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + d\underline{U})$$

Conhecidos  $\underline{U}_t$ ,  $\dot{\underline{U}}_t$  e  $\ddot{\underline{U}}_t$  calcula-se:

$$\underline{\ddot{F}}_t = - \underline{K} \underline{U}_t - \underline{C} \underline{\dot{U}}_t + \underline{R}_t \text{ e } \underline{\dot{F}}_t = - \underline{K} \underline{\dot{U}}_t - \underline{C} \underline{\ddot{U}}_t + \underline{\dot{R}}_t \quad (\text{III.48})$$

Como primeira aproximação adota-se:

$$\underline{\dot{F}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{F}}_t \text{ e } \underline{F}_{t+\Delta t} = \underline{F}_t + \Delta t \underline{\dot{F}}_t \quad (\text{III.49})$$

Calcula-se então  $d\underline{\dot{U}}$  e  $d\underline{U}$  levando (III.48) e (III.49) em (III.46) e (III.47).

Resolve-se a seguir o sistema:

$$\underline{M} \underline{\ddot{U}}_{t+\Delta t} = \underline{F}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.50})$$

e obtêm-se o vetor de acelerações  $\underline{\ddot{U}}_{t+\Delta t}$ ; com  $d\underline{\dot{U}}$  e  $d\underline{U}$  obtêm-se  $\underline{\dot{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\underline{U}_{t+\Delta t}$ . Calcula-se então a seguir:

$$\underline{\dot{F}}_{t+\Delta t}^* = - \underline{K} \underline{\dot{U}}_{t+\Delta t} - \underline{C} \underline{\ddot{U}}_{t+\Delta t} + \underline{\dot{R}}_{t+\Delta t} \text{ e} \quad (\text{III.51})$$

$$\underline{F}_{t+\Delta t}^* = - \underline{K} \underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{C} \underline{\dot{U}}_{t+\Delta t} + \underline{R}_{t+\Delta t}$$

Comparam-se então as expressões (III.51) e (III.49), calcula-se o erro e repete-se o procedimento até que haja convergência, ou seja:

$$|| \underline{\dot{F}}_{t+\Delta t}^* - \underline{\dot{F}}_{t+\Delta t} || \leq \dot{\epsilon}_1$$

onde  $\dot{\epsilon}_1$  é a tolerância fixada.



Será vantajoso para este algoritmo utilizar-se uma matriz de massa diagonal, o que torna o algoritmo explícito não sendo necessária a resolução do sistema (III.50). O vetor de acelerações é obtido diretamente:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{1}{m_{ii}} F_{t+\Delta t}^{(i)}$$

Este algoritmo já foi utilizado para problemas de muitos graus de liberdade ( $\sim 1000$ ), mostrando-se bastante eficiente. A vantagem em relação ao M.D.C. está na ordem de precisão ser superior (4.<sup>a</sup> ordem em vez de 2.<sup>a</sup> ordem).

#### III.4.3 - Algoritmo Hermitiano Cúbico II

Este algoritmo (desenvolvido por Dunne e outros autores, ver ref. (8)) é uma modificação do algoritmo descrito no item anterior, a formulação é feita em termos de deslocamentos em vez de forças de inércia.

Será mostrado no item IV.2.5 que modificando a equação (III.45):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{t+\Delta t} = & \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \Delta t^2 \underline{M}^{-1} \left( \frac{1}{3} \underline{F}_t + \frac{\Delta t}{24} \dot{\underline{F}}_t + \frac{1}{6} \underline{F}_{t+\Delta t} - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{24} \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

o algoritmo hermitiano cúbico I torna-se incondicionalmente estável.

Derivando (III.40) em relação a  $t$ : (lembrando que os sistemas estruturais usados são lineares)

$$\dot{\underline{\tilde{F}}} = \dot{\underline{\tilde{R}}} - \underline{\tilde{K}} \dot{\underline{\tilde{U}}} - \underline{\tilde{C}} \ddot{\underline{\tilde{U}}} = \dot{\underline{\tilde{R}}} - \underline{\tilde{K}} \dot{\underline{\tilde{U}}} - \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1}(\underline{\tilde{R}} - \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{U}} - \underline{\tilde{C}} \dot{\underline{\tilde{U}}}) \quad (\text{III.53})$$

Escrevendo (III.53) e (III.40) nos instantes  $t$  e  $t+\Delta t$  e substituindo nas equações (III.44) e (III.52), obtêm-se um sistema de equações similar ao sistema (III.35):

$${}_3\overline{\underline{\tilde{D}}}_{t+\Delta t} \underline{\tilde{Y}}_{t+\Delta t} = {}_3\overline{\underline{\tilde{D}}}_t \underline{\tilde{Y}}_t + \Delta \overline{\underline{\tilde{P}}}_3 \quad (\text{III.54})$$

onde

$$\underline{\tilde{Y}}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\tilde{U}}}_{t+\Delta t} \\ \underline{\tilde{U}}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\tilde{Y}}_t = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\tilde{U}}}_t \\ \underline{\tilde{U}}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{ver (III.28)})$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (III.54) pela matriz  $\begin{bmatrix} \underline{\tilde{M}} & \underline{\tilde{0}} \\ \underline{\tilde{0}} & \underline{\tilde{M}} \end{bmatrix}$  vem:

$${}_3\overline{\underline{\tilde{D}}}_{t+\Delta t} \underline{\tilde{Y}}_{t+\Delta t} = {}_3\overline{\underline{\tilde{D}}}_t \underline{\tilde{Y}}_t + \Delta \overline{\underline{\tilde{P}}}_3 \quad (\text{III.55})$$

onde

$${}_3\bar{D}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \bar{M} + \frac{\Delta t}{2} \bar{C} - \frac{\Delta t^2}{12} (\bar{K} - \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{C}) & \frac{\Delta t}{2} \bar{K} + \frac{\Delta t^2}{12} \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{K} \\ \frac{\Delta t^2}{6} \bar{C} - \frac{\Delta t^3}{24} (\bar{K} - \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{C}) & \bar{M} + \frac{\Delta t^2}{6} \bar{K} + \frac{\Delta t^3}{24} \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{K} \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

$${}_3\bar{D}_t = \begin{bmatrix} \bar{M} - \frac{\Delta t}{2} \bar{C} - \frac{\Delta t^2}{12} (\bar{K} - \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{C}) & - \frac{\Delta t}{2} \bar{K} + \frac{\Delta t^2}{12} \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{K} \\ \Delta t \bar{M} - \frac{\Delta t^2}{3} \bar{C} - \frac{\Delta t^3}{24} (\bar{K} - \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{C}) & \bar{M} - \frac{\Delta t^2}{3} \bar{K} + \frac{\Delta t^3}{24} \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{K} \end{bmatrix} \quad (\text{III.57})$$

$$\Delta P_3 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \bar{I} + \frac{\Delta t^2}{12} \bar{C} \bar{M}^{-1} & \frac{\Delta t}{2} \bar{I} - \frac{\Delta t^2}{12} \bar{C} \bar{M}^{-1} \\ \frac{\Delta t^2}{6} \bar{I} + \frac{\Delta t^3}{24} \bar{C} \bar{M}^{-1} & \frac{\Delta t^2}{3} \bar{I} - \frac{\Delta t^3}{24} \bar{C} \bar{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{R}_{t+\Delta t} \\ \bar{R}_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t^2}{12} (\dot{\bar{R}}_t - \dot{\bar{R}}_{t+\Delta t}) \\ \frac{\Delta t^3}{24} (\dot{\bar{R}}_t - \dot{\bar{R}}_{t+\Delta t}) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.58})$$

Este algoritmo apesar de ser incondicionalmente estável tem a grande desvantagem de resolver a cada etapa um sistema  $2n \times 2n$  (III.55) em vez de um sistema  $n \times n$  como nos outros algoritmos. Isto implica num aumento excessivo no tempo de processamento bem como no armazenamento das matrizes (III.56) a (III.58).

Os dois únicos algoritmos incondicionalmente estáveis, de precisão de 4.<sup>a</sup> ordem, que resolvem um sistema nxn a cada etapa são os algoritmos hermitianos cúbicos III (para  $\zeta = 1/2$ ) e IV que serão apresentados nos próximos itens.

#### III.4.4 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III

Este algoritmo (desenvolvido por L. E. Vaz e outros autores, ver ref. (9)) utiliza interpolação cúbica dos deslocamentos:

$$\underline{Y} = w_t \underline{Y}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{Y}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} + \Delta t \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{Y}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.59})$$

onde  $w_t, \dots, \bar{w}_{t+\Delta t}$  foram definidos em (III.42).

Derivando (III.59) em relação a  $t$  obtêm-se a variação das velocidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{Y}} = \frac{1}{\Delta t} (w'_t \underline{Y}_t + \Delta t \bar{w}'_t \dot{\underline{Y}}_t + w'_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} + \Delta t \bar{w}'_{t+\Delta t} \dot{\underline{Y}}_{t+\Delta t}) \\ \underline{Y} = w_t \underline{Y}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{Y}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} + \Delta t \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{Y}}_{t+\Delta t} \end{array} \right. \quad (\text{III.60})$$

$$(\text{Lembrando que } \dot{\underline{Y}} = \frac{d\underline{Y}}{dt} = \frac{d\underline{Y}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \underline{Y}')$$

Este algoritmo é incondicionalmente estável para  $\zeta \geq 1/2$ , como será visto no item IV.2.6.

Pode-se usar interpolação linear ou cúbica das forças externas:

$$\underline{P} = (1 - \zeta) \underline{P}_t + \zeta \underline{P}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.61})$$

ou

$$\underline{P} = w_t \underline{P}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{P}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{P}_{t+\Delta t} + \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{P}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.62})$$

Substituindo (III.59), (III.60) e (III.61) ou (III.62) em (III.26) vem:

$$\begin{aligned} & (w'_t \underline{I} + \Delta t w_t A_2) \underline{Y}_t + (\Delta t \bar{w}'_t \underline{I} + \Delta t^2 \bar{w}_t A_2) \dot{\underline{Y}}_t + \\ & + (w'_{t+\Delta t} \underline{I} + \Delta t w_{t+\Delta t} A_2) \underline{Y}_{t+\Delta t} + (\Delta t \bar{w}'_{t+\Delta t} \underline{I} + \\ & + \Delta t^2 \bar{w}_{t+\Delta t} A_2) \dot{\underline{Y}}_{t+\Delta t} = \Delta t \bar{\underline{P}} \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

onde  $\bar{\underline{P}} = \underline{B}_1^{-1} \underline{P}$

Escrevendo (III.26) para os instantes  $t$  e  $t+\Delta t$  vem:

$$\dot{\underline{Y}}_t = \bar{\underline{P}}_t - A_2 \underline{Y}_t \quad (\text{III.64})$$

$$\dot{\underline{Y}}_{t+\Delta t} = \bar{\underline{P}}_{t+\Delta t} - A_2 \underline{Y}_{t+\Delta t}$$

Introduzindo (III.64) em (III.63) e dividindo ambos os lados da equação por  $w'_{t+\Delta t}$  vem:

$$\begin{aligned} (\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A}_2 + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2^2) \underline{Y}_{t+\Delta t} = (\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A}_2 + \\ + \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2^2) \underline{Y}_t + \overline{\Delta P}_3 \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Quando  $\underline{P}$  for dado por (III.61):

$$\overline{\Delta P}_3 = (\psi_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\overline{P}}_t + (\psi_2 \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\overline{P}}_{t+\Delta t} \quad (\text{III.66})$$

E quando  $\underline{P}$  fôr dado por (III.62):

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P}_3 = [(\psi_4 - \beta_1) \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2] \underline{\overline{P}}_t + [(\psi_5 + \alpha_1) \Delta t \underline{I} + \\ + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2] \underline{\overline{P}}_{t+\Delta t} + \psi_3 \Delta t \underline{\overline{P}}_{t+\zeta \Delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

As constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \psi_5$  estão definidas no Apêndice AI.3.

O sistema (III.65) pode ser escrito na forma (similar a (III.35)):

$$\underline{\overline{B}}_{3t+\Delta t} \cdot \underline{Y}_{t+\Delta t} = \underline{\overline{B}}_{3t} \cdot \underline{Y}_t + \overline{\Delta P}_3 \quad (\text{III.68})$$

onde

$${}_3\bar{B}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.69})$$

$${}_3\bar{B}_t = \begin{bmatrix} \bar{B}_{011} & \bar{B}_{012} \\ \bar{B}_{021} & \bar{B}_{022} \end{bmatrix} \quad e \quad (\text{III.70})$$

$$\bar{\Delta P}_{\sim 3} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta P}_{\sim 3,1} \\ \bar{\Delta P}_{\sim 3,2} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.71})$$

As expressões de  $\bar{B}_{11}$ ,  $\bar{B}_{12}$ , ...,  $\bar{\Delta P}_{\sim 3,2}$  estão explicadas com detalhes no Apêndice AI.3.

O sistema (III.68) é um sistema  $2n \times 2n$ , mas pré-multiplicando ambos os lados de (III.68) pela matriz auto-ajunta de  ${}_3\bar{B}_{t+\Delta t}$ , vem:

$${}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{B}_{t+\Delta t} \cdot \underline{Y}_{t+\Delta t} = {}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{B}_t \underline{Y}_t + {}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* \cdot \bar{\Delta P}_{\sim 3} \quad (\text{III.72})$$

onde

$${}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* = \begin{bmatrix} \bar{B}_{22} & -\bar{B}_{12} \\ -\bar{B}_{21} & \bar{B}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{III.73})$$

Admitindo a hipótese da matriz de amortecimento ser proporcional às matrizes de rigidez e de massa ( $\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$ ), consegue-se desacoplar (III.72) em dois sistemas nxn:

$${}_3\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} & \underline{0} \\ \underline{0} & \bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{III.74})$$

$${}_3\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{\underline{B}}_t = \begin{bmatrix} \bar{\underline{B}}_{t11} & \bar{\underline{B}}_{t12} \\ \bar{\underline{B}}_{t21} & \bar{\underline{B}}_{t22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.75})$$

$${}_3\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t}^* \cdot \overline{\Delta \underline{P}}_3 = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta_{11} \underline{R}} \\ \overline{\Delta_{22} \underline{R}} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.76})$$

As expressões de  $\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t}$ ,  $\bar{\underline{B}}_{t11}$ , ...,  $\overline{\Delta_{22} \underline{R}}$ , estão explicadas no Apêndice AI.3.

Levando (III.28) e (III.74) a (III.76) em (III.72), vem:

$$\begin{cases} \bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} \cdot \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \bar{\underline{B}}_{t11} \dot{\underline{U}}_t + \bar{\underline{B}}_{t12} \underline{U}_t + \overline{\Delta_{11} \underline{R}} \\ \bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} \cdot \underline{U}_{t+\Delta t} = \bar{\underline{B}}_{t21} \dot{\underline{U}}_t + \bar{\underline{B}}_{t22} \underline{U}_t + \overline{\Delta_{22} \underline{R}} \end{cases} \quad (\text{III.77})$$



Pré-multiplicando ambos os lados das equações (III.77) por  $\underline{M}$  vem:

$$\begin{cases} \underline{B}_{t+\Delta t} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \underline{B}_{t11} \dot{\underline{U}}_t + \underline{B}_{t12} \underline{U}_t + \Delta_{11} \underline{R} \\ \underline{B}_{t+\Delta t} \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{B}_{t21} \dot{\underline{U}}_t + \underline{B}_{t22} \underline{U}_t + \Delta_{22} \underline{R} \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

Chega-se então a dois sistemas nxn com o lado esquerdo das equações iguais:

$$\underline{B}_{t+\Delta t} = \underline{M} + a_1 \underline{C} + a_2 \underline{K} + a_3 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} + a_4 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K} + a_5 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K} \quad (\text{III.79})$$

Logo só será necessário montar e fatorar uma matriz de rigidez efetiva ( $\underline{B}_{t+\Delta t}$ ).

Observando a expressão (III.79) nota-se que, apesar da matriz  $\underline{B}_{t+\Delta t}$  continuar sendo simétrica, ela perde a esparsidade inicial das matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$ , perda esta devida aos produtos triplos  $\underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C}$ , etc. Omitindo estes produtos triplos tem-se a matriz de rigidez efetiva do algoritmo hermitiano linear. A desvantagem deste algoritmo está nesta perda de esparsidade de  $\underline{B}_{t+\Delta t}$ : quando  $\underline{M}$  for diagonal  $\underline{B}_{t+\Delta t}$  terá o dobro da largura de banda de  $\underline{K}$  e quando  $\underline{M}$  for consistente  $\underline{B}_{t+\Delta t}$  será cheia.

Para  $\zeta = 1/2$  este algoritmo equivale ao algoritmo hermitiano cúbico II, com a vantagem de se resolver um sis-

tema  $n \times n$  em vez de um  $2n \times 2n$ .

#### III.4.5 - Algoritmo Hermitiano Cúbico IV

Este algoritmo (desenvolvido por Serbin, ver ref. (17)) utiliza interpolação cúbica para os deslocamentos bem como para as forças externas; ele equivale ao algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$  e interpolação cúbica das formas externas. A diferença entre os dois algoritmos está no desacoplamento do sistema (III.68) ( $2n \times 2n$ ).

Substituindo os valores das constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \psi_5$  para  $\zeta = 1/2$  ( $\alpha_1 = 1/2$ ;  $\beta_1 = -1/2$ ;  $\alpha_2 = \beta_2 = 1/12$ ;  $\psi_3 = 2/3$  e  $\psi_4 = \psi_5 = -1/3$ ) nas equações (III.67) e (III.65) tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \underline{I} + \frac{1}{2} \Delta t \underline{A}_2 + \frac{1}{12} \Delta t^2 \underline{A}_2^2 \right) \underline{Y}_{t+\Delta t} &= \left( \underline{I} - \frac{1}{2} \Delta t \underline{A}_2 + \frac{1}{12} \Delta t^2 \underline{A}_2^2 \right) \underline{Y}_t + \\ &+ \left( \frac{1}{6} \Delta t \underline{I} - \frac{1}{12} \Delta t^2 \underline{A}_2 \right) \underline{\bar{P}}_t + \left( \frac{1}{6} \Delta t \underline{I} + \frac{1}{12} \Delta t^2 \underline{A}_2 \right) \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + \\ &+ \frac{2}{3} \Delta t \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t/2} \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Ou então:

$$\begin{aligned} \left( \underline{I} + \frac{1}{2} \Delta t \underline{A}_2 + \frac{\Delta t^2}{12} \underline{A}_2^2 \right) (\underline{Y}_{t+\Delta t} - \underline{Y}_t) &= -\Delta t \underline{A}_2 \underline{Y}_t + \\ &+ \frac{\Delta t}{6} (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + 4 \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t/2} + \underline{\bar{P}}_t) + \frac{\Delta t^2}{12} \underline{A}_2 (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} - \underline{\bar{P}}_t) \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

Definindo:

$$\underline{H} = \underline{I} + \theta \Delta t \underline{A}_2 \quad (\text{III.82})$$

onde

$$\theta = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{III.83})$$

Pode-se calcular:

$$\underline{H} \underline{H} = \underline{I} + \frac{\Delta t}{2} \underline{A}_2 + \frac{\Delta t^2}{12} \underline{A}_2^2 \quad (\text{III.84})$$

e

$$\underline{H} - \underline{\bar{H}} = - (\bar{\theta} - \theta) \Delta t \underline{A}_2 \quad (\text{III.85})$$

Obs.:

Os conjugados de  $\underline{H}$  e  $\theta$  são:

$$\underline{\bar{H}} = \underline{I} + \bar{\theta} \Delta t \underline{A}_2 \quad \text{e} \quad \bar{\theta} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(\theta \bar{\theta} = \frac{1}{12} \quad \text{e} \quad \theta + \bar{\theta} = \frac{1}{2})$$

Definindo agora:

$$\underline{V}_t = - \underline{A}_2^{-1} \left[ \frac{1}{6} (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + 4 \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t/2} + \underline{\bar{P}}_t) \right] = \begin{Bmatrix} \underline{\psi}_t \\ \underline{\phi}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.86})$$

pode-se reescrever a equação (III.81), substituindo nesta as equações (III.84) a (III.86):

$$\underline{H} \cdot \underline{H} (\underline{Y}_{t+\Delta t} - \underline{Y}_t) = \frac{(\underline{H} - \underline{\bar{H}})}{\underline{\theta} - \underline{\bar{\theta}}} \left[ \underline{Y}_t + \underline{V}_t - \frac{\Delta t}{12} (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} - \underline{\bar{P}}_t) \right] \quad (\text{III.87})$$

Pré-multiplicando (III.87) por  $(\underline{H} \underline{\bar{H}})^{-1}$  e simplificando (ver Apêndice AI.4) vem:

$$\underline{Y}_{t+\Delta t} - \underline{Y}_t = 4 \sqrt{3} \text{Im} \{ \underline{H}^{-1} \} \underline{W}_t \quad (\text{III.88})$$

onde

$$\underline{W}_t = \underline{Y}_t + \underline{V}_t - \frac{\Delta t}{12} (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} - \underline{\bar{P}}_t) \quad (\text{III.89})$$

Observando (III.88) nota-se que deve-se resolver apenas um sistema complexo:

$$\underline{H} \underline{Z}_t = \underline{W}_t \quad (\text{III.90})$$

onde

$$\underline{Z}_t = \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_t \\ \underline{\gamma}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.91})$$

Aparentemente (III.90) é um sistema  $2n \times 2n$ , mas, simplificando chega-se a um sistema  $n \times n$ :

Pré-multiplicando (III.90) por  $\underline{B}_1$ :

$$\underline{B}_1 \underline{H} \underline{Z}_t + \underline{B}_1 \underline{W}_t \quad (\text{III.92})$$

De (III.82) tem-se que:

$$\underline{B}_1 \underline{H} = \underline{B}_1 + \theta \Delta t \underline{B}_1 \underline{A}_2 = \underline{B}_1 + \theta \Delta t \underline{B}_2 \quad (\text{III.93})$$

(ver equação (III.27)).

Introduzindo (III.29), (III.93) e (III.91) em (III.92) vem:

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} + \theta \Delta t \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_t \\ \underline{y}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \underline{W}_t$$

ou

$$\begin{bmatrix} \underline{M} + \theta \Delta t \underline{C} & \theta \Delta t \underline{K} \\ -\theta \Delta t \underline{I} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_t \\ \underline{y}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \underline{W}_t \quad (\text{III.94})$$

As componentes de  $\underline{V}_t$  são iguais a: (ver Apêndice AI.4)

$$\psi_t = 0 \quad (\text{III.95})$$

$$\phi_t = -\frac{1}{6} \underline{\underline{K}}^{-1} (\underline{\underline{R}}_{t+\Delta t} + 4 \underline{\underline{R}}_{t+\Delta t/2} + \underline{\underline{R}}_t) \quad (\text{III.96})$$

Levando (III.28) e (III.95) em (III.89) tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{W}}_t &= \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{U}}}_t \\ \underline{\underline{U}}_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_t \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{12} (\underline{\underline{P}}_{t+\Delta t} - \underline{\underline{P}}_t) = \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{U}}}_t - \frac{\Delta t}{12} \underline{\underline{M}}^{-1} (\underline{\underline{R}}_{t+\Delta t} - \underline{\underline{R}}_t) \\ \underline{\underline{U}}_t + \phi_t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.97}) \end{aligned}$$

$$(\text{lembrar que } \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{B}}_1^{-1} \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{R}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{R}} \\ 0 \end{Bmatrix} )$$

Substituindo (III.97) em (III.94) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} + \theta \Delta t \underline{\underline{C}} & \theta \Delta t \underline{\underline{K}} \\ -\theta \Delta t \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_t \\ \gamma_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{U}}}_t - \frac{\Delta t}{12} (\underline{\underline{R}}_{t+\Delta t} - \underline{\underline{R}}_t) \\ \underline{\underline{U}}_t + \phi_t \end{Bmatrix}$$

ou seja:

$$(\underline{M} + \theta \Delta t \underline{C}) \underline{\delta}_t + \theta \Delta t \underline{K} \underline{\gamma}_t = \underline{M} \dot{\underline{U}}_t - \frac{\Delta t}{12} (\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{R}_t) \quad (\text{III.98})$$

e

$$- \theta \Delta t \underline{\delta}_t + \underline{\gamma}_t = \underline{U}_t + \underline{\phi}_t$$

$$\therefore \underline{\gamma}_t = \underline{U}_t + \underline{\phi}_t + \theta \Delta t \underline{\delta}_t \quad (\text{III.99})$$

Introduzindo (III.99) em (III.98) vem:

$$(\underline{M} + \theta \Delta t \underline{C}) \underline{\delta}_t + \theta \Delta t \underline{K} (\underline{U}_t + \underline{\phi}_t + \theta \Delta t \underline{\delta}_t) = \underline{M} \dot{\underline{U}}_t - \frac{\Delta t}{12} (\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{R}_t) \quad (\text{III.100})$$

Levando (III.96) em (III.100) chega-se a:

$$(\underline{M} + \theta \Delta t \underline{C} + \theta^2 \Delta t^2 \underline{K}) \underline{\delta}_t = \underline{M} \dot{\underline{U}}_t - \theta \Delta t \underline{K} \underline{U}_t + \frac{\theta \Delta t}{6} (\underline{R}_{t+\Delta t} + 4 \underline{R}_{t+\Delta t/2} + \underline{R}_t) - \frac{\Delta t}{12} (\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{R}_t) \quad (\text{III.101})$$

que é um sistema complexo  $n \times n$ .

De (III.88) e (III.90) tem-se que:

$$\underline{Y}_{t+\Delta t} - \underline{Y}_t = 4 \sqrt{3} \operatorname{Im} \underline{Z}_t = 4 \sqrt{3} \begin{Bmatrix} \operatorname{Im} \underline{\delta}_t \\ \operatorname{Im} \underline{\gamma}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.102})$$

Sabe-se que:

$$\text{Im } \underline{\gamma}_t = \text{Im}(\theta \Delta t + \underline{\delta}_t)$$

e

$$4 \sqrt{3} \text{Im}(\theta \Delta t \underline{\delta}_t) = \Delta t (\text{Re } \underline{\delta}_t + \sqrt{3} \text{Im } \underline{\delta}_t) \quad (\text{III.103})$$

(ver Apêndice AI.4).

Finalmente, substituindo (III.28) e (III.103) em (III.102) chega-se a:

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + 4 \sqrt{3} \text{Im } \underline{\delta}_t \quad (\text{III.104})$$

e

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t (\text{Re } \underline{\delta}_t + \sqrt{3} \text{Im } \underline{\delta}_t) \quad (\text{III.105})$$

Existem duas maneiras de se implementar este algoritmo. A primeira delas consiste em resolver o sistema complexo (III.101) que pode ser escrito na forma:

$$\hat{\underline{K}} \underline{\delta}_t = \hat{\underline{R}} \quad (\text{III.106})$$

onde  $\hat{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez efetiva e

$\hat{\underline{R}}$  é o vetor de cargas efetivo.



Resolvendo (III.106) obtém-se o vetor  $\underline{\delta}_t$  e a partir deste, pelas equações (III.104) e (III.105) obtém-se  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\underline{U}_{t+\Delta t}$ .

A segunda maneira, que não será apresentada neste trabalho (ver ref. (17)) consiste em transformar (III.101) num sistema real  $2n \times 2n$  que pode ser resolvido iterativamente.

Este algoritmo é incondicionalmente estável, de precisão de 4.<sup>a</sup> ordem e apenas um sistema  $n \times n$  é resolvido a cada etapa. A vantagem deste algoritmo em relação ao algoritmo hermitiano cúbico III é que a esparsidade das matrizes iniciais  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  é mantida na matriz de rigidez efetiva, no entanto, o sistema a resolver (III.106) é um sistema complexo o que é uma desvantagem.

## CAPÍTULO IV

### ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS ALGORITMOS

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão estudadas as propriedades dos algoritmos descritos no capítulo anterior e também será visto o problema da escolha do intervalo de integração  $\Delta t$ .

De uma maneira geral, para que um algoritmo seja competitivo ele deve atender aos seguintes requisitos:

- 1) apresentar estabilidade em problemas lineares
- 2) ter uma precisão no mínimo de 2.<sup>a</sup> ordem
- 3) não mais de um sistema  $n \times n$  de equações implícitas deve ser resolvido a cada etapa
- 4) não apresentar uma amplificação nas primeiras etapas ("overshoot")
- 5) ter auto-partida.

Segundo Hilber (ver ref. (12)), um outro requisito que seria: dissipação algorítmica, controlável nos modos mais altos, também deveria ser incluído; isto será discutido no item IV.3.

Todos os algoritmos descritos no capítulo anterior com exceção do Método das Diferenças Centrais atendem ao requisito (5). Todos, com exceção do algoritmo hermitiano cúbico II, atendem também ao requisito (3). Logo só serão estudadas neste capítulo as propriedades relativas aos requisitos (1), (2) e (4).

No estudo destas propriedades será usado o método de superposição modal para simplificação da análise.

Como já foi visto no Capítulo II, a equação (II.23) equivale a  $n$  equações (II.40) que podem ser resolvidas pela integral de Duhamel, pela Transformada de Fourier ou então pelos métodos de integração direta. Neste último caso, sendo os períodos de vibração  $T_i$  conhecidos ( $T_i = 2\pi/\omega_i$ ) pode-se escolher para cada equação o  $\Delta t$  apropriado para obter-se uma certa precisão. Se, ao invés disto, se usar o mesmo  $\Delta t$  para todas as equações, a resposta obtida será a mesma do que a obtida usando diretamente os métodos de integração direta. Logo, estudar as propriedades de integração da equação (II.23) equivale a estudar as propriedades de integração das equações (II.40), que como são similares basta estudar apenas uma:

$$\ddot{x} + 2 \xi \omega \dot{x} + \omega^2 x = r \quad (\text{IV.1})$$

De forma que as variáveis a considerar são, apenas  $\Delta t$ ,  $\omega$  e  $\xi$ , em vez de matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

O objetivo da integração numérica de um sistema de equações diferenciais, discretizado por uma malha de elementos finitos, é obter uma boa aproximação da resposta dinâmica real da estrutura. Para que as equações (II.23) sejam bem integradas deve-se integrar bem as  $n$  equações (II.40). Como nos métodos de integração direta o mesmo intervalo de integração  $\Delta t$  é usado para as  $n$  equações (II.40), ele deve ser escolhido em relação ao menor período da estrutura  $T_n$ . Como primeira tentativa pode-se escolher  $T_n/10$  para o intervalo de integração  $\Delta t$  o que, de uma maneira geral, dá uma boa aproximação da solução real. Isto implica em se usar um  $\Delta t$  muito pequeno pois geralmente  $T_n$  é pequeno, logo muitas etapas devem ser efetuadas. No entanto, como já foi visto no Capítulo II, em alguns problemas apenas os primeiros modos de vibração ( $p$  modos) participam da solução do problema e, neste caso, escolhendo  $T_p/10$  para  $\Delta t$  também obtém-se uma boa aproximação da solução real. Tendo em vista que poderá se usar um  $\Delta t$   $T_p/T_n$  vezes maior, será feita uma economia bastante significativa, especialmente em problemas de muitos graus de liberdade.

Utilizando um intervalo de integração maior, os modos mais altos serão integrados com um  $\Delta t$  muito grande em relação aos seus períodos naturais  $T$ , logo não serão integrados com uma boa precisão. Que tipo de resposta será obtida quando a relação  $\Delta t/T$  for grande ? Este é o problema essencial da estabilidade que será estudado no próximo item.

## IV.2 - ESTABILIDADE

Um método de integração direta de um sistema de equações diferenciais apresenta estabilidade quando não amplificar artificialmente as condições iniciais a que estão submetidas as equações, no caso em que o intervalo de integração  $\Delta t$  escolhido for grande em relação ao período natural  $T$ , ou seja, quando a relação  $\Delta t/T$  for grande.

Analogamente à obtenção dos métodos de integração direta, supondo conhecidas as soluções nos instantes discretos  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$  pode-se reescrever (IV.1) sob uma forma recursiva para obter-se a solução no instante  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\underline{X}}_{t+\Delta t} = \underline{A} \hat{\underline{X}}_t + \underline{L} \underline{r}_{t+v} \quad (\text{IV.2})$$

onde  $\hat{\underline{X}}_{t+\Delta t}$  e  $\hat{\underline{X}}_t$  são os vetores que contem as soluções (deslocamentos, velocidades, etc.), a matriz  $\underline{A}$  é a chamada matriz de amplificação e o vetor  $\underline{L}$  é o operador de carga;  $\underline{r}_{t+v}$  é o vetor de cargas no instante  $t+v$  onde  $v$  pode ser  $0, \Delta t$  ou  $\theta\Delta t$  dependendo do método considerado.

Para se obter a solução no instante  $t + n\Delta t$  basta aplicar (IV.2) recursivamente:

$$\hat{\underline{X}}_{t+n\Delta t} = \underline{A}^n \hat{\underline{X}}_t + \underline{A}^{n-1} \underline{L} \underline{r}_{t+v} + \dots + \underline{L} \underline{r}_{t+(n-1)\Delta t+v} \quad (\text{IV.3})$$

Já que a estabilidade de um método de integração é

determinada examinando o comportamento da solução numérica para condições iniciais arbitrárias, pode-se considerar a integração da (IV.1) para  $r = 0$ . Reescrevendo então a equação (IV.3):

$$\hat{\underline{X}}_{t+n\Delta t} = \underline{A}^n \hat{\underline{X}}_t \quad (\text{IV.4})$$

Diz-se que um método de integração é incondicionalmente estável quando a solução não crescer indefinidamente para quaisquer condições iniciais, isto é, quando for limitada para qualquer intervalo de integração  $\Delta t$ , mesmo quando a relação  $\Delta t/T$  for grande.

O método é dito condicionalmente estável quando a solução for limitada apenas para  $\Delta t$  menor do que um certo valor chamado limite de estabilidade.

Fazendo a decomposição espectral da matriz de amplificação  $\underline{A}$ , vem:

$$\underline{A}^n = \underline{P} \cdot \underline{J}^n \cdot \underline{P}^{-1}$$

onde  $\underline{P}$  é a matriz dos auto-vetores de  $\underline{A}$  e  $\underline{J}$  é uma matriz diagonal cujos elementos  $j_{ii}$  são os auto-valores  $\lambda_i$  de  $\underline{A}$ .

Chamando  $\rho(A) = \max |\lambda_i|$  de raio espectral de  $\underline{A}$ , diz-se que  $\underline{J}^n$  é limitada quando  $n \rightarrow \infty$  se e somente se  $\rho(A) \leq 1$ . Este é o chamado critério de estabilidade, além disto deve-se ter  $\underline{J}^n \rightarrow 0$  quando  $\rho(A) < 1$ .

Para analisar a estabilidade dos diversos métodos será calculado o raio espectral da matriz de amplificação de cada método supondo que não haja amortecimento físico ( $\xi = 0$ ).

Em alguns métodos será conveniente aplicar uma transformação similar nas matrizes de amplificação ( $\underline{D}^{-1} \underline{A} \underline{D}$ , sendo  $\underline{D}$ , uma matriz diagonal com  $d_{ii} = (\Delta t)^i$ ) para o cálculo do raio espectral  $\rho(A)$ :

As matrizes de amplificação  $\underline{A}$  dos diversos métodos estão calculadas no Apêndice AII.1.

#### IV.2.1 - Método das Diferenças Centrais

A matriz de amplificação deste método é (ver Apêndice AII.1.1):

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Para determinar o raio espectral de  $\underline{A}(\rho(A))$  deve-se calcular os auto-valores de  $\underline{A}$  que são raízes do polinômio característico:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (2 - \omega^2 \Delta t^2 - \lambda)(-\lambda) + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2 \pm \sqrt{(\omega^2 \Delta t^2 - 2)^2 - 4}}{2}$$

Chamando de  $\Delta = \beta^2 - 4$  o discriminante das raízes onde  $\beta = \omega^2 \Delta t^2 - 2$ , tem-se:

$$(i) \Delta \leq 0$$

$$\beta^2 - 4 \leq 0 \rightarrow \beta \leq 2 \rightarrow \omega \Delta t \leq 2$$

$$(\omega \Delta t > 0)$$

$$\text{Como } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ então } \frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi}$$

$$\lambda = - \frac{\beta \pm i \sqrt{4 - \beta^2}}{2}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{(-\beta)^2 + 4 - \beta^2}{4}} = 1$$

$$(ii) \Delta > 0 \rightarrow \frac{\Delta t}{T} > \frac{1}{\pi}$$

Neste caso  $|\lambda|_{\max}$  será sempre maior do que 1.

Portanto para que o método seja estável ou seja,  $\rho(A) \leq 1$ , deve-se ter  $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi}$  por isto o método é dito condicionalmente estável.

#### IV.2.2 - Método de Wilson- $\theta$

Aplicando na matriz de amplificação  $A$  deste método (ver Apêndice AII.1.2) uma transformação similar vem:



$$\bar{A} = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} & -\beta\theta & -\beta \\ 1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} & 1 - \frac{\beta\theta}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} & 1 - \frac{\beta\theta}{6} & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

O polinômio característico de  $\bar{A}$  é:

$$\det(\bar{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + A_1\lambda^2 - A_2\lambda + A_3$$

onde  $A_i$  representa o invariante de ordem  $i$  de  $\bar{A}$ .

$$A_1 = 3 - \frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta\theta}{2} - \frac{\beta\theta^2}{3}$$

$$A_2 = 3 + \frac{2\beta}{3} - \frac{2}{\theta} - 2\frac{\beta\theta^2}{3}$$

$$A_3 = 1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{6} + \frac{\beta\theta}{2} - \frac{\beta\theta^2}{3}$$

Igualando este polinômio a zero obtêm-se as raízes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  que são os auto-valores de  $\bar{A}$ .

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Para se determinar as condições em que  $|\lambda| = 1$  pode-se substituir  $\lambda = e^{i\phi}$  ( $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ ) em (IV.7):

$$(\phi \in [0, 2\pi])$$

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^3 - A_1(\cos \phi + i \sin \phi)^2 + \\ + A_2(\cos \phi + i \sin \phi) - A_3 = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Para que a equação (IV.8) seja satisfeita as suas partes real e imaginária devem ser nulas individualmente:

$$\cos^3 \phi - 3\cos \phi \sin^2 \phi - A_1 \cos^2 \phi + A_1 \sin^2 \phi + A_2 \cos \phi - A_3 = 0 \\ - \sin^3 \phi + 3\cos^2 \phi \sin \phi - 2A_1 \sin \phi \cos \phi + A_2 \sin \phi = 0$$

Sabendo que  $\cos^3 \phi = \cos \phi (1 - \sin^2 \phi)$  e  $\sin^3 \phi = \sin \phi (1 - \cos^2 \phi)$ , vem:

$$\cos \phi (1 - 4\sin^2 \phi - 2A_1 \cos \phi + A_2) + A_1 - A_3 = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$-\sin \phi (1 - 4\cos^2 \phi + 2A_1 \cos \phi - A_2) = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Três casos podem ocorrer:

$$(i) \quad \phi = 0 \text{ ou } \phi = 2\pi \quad (\lambda = 1)$$

A equação (IV.9) fica sendo:

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Substituindo  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  em (IV.11) vem:

$$\frac{\beta}{6} + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta}{6} = 0 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \omega\Delta t = 0$$

Introduzindo  $\beta = 0$  em (IV.7) tem-se:

$$\lambda^3 - \left(3 - \frac{1}{\theta}\right) \lambda^2 + \left(3 - \frac{2}{\theta}\right) \lambda - \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = 0$$

Cuja solução é  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 1 - \frac{1}{\theta}$

(ii)  $\phi = \pi$  ( $\lambda = -1$ )

A equação (IV.9) fica sendo:

$$1 + A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Levando  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  em (IV.12) chega-se a

$$\beta = \frac{12(1 - 2\theta)}{\theta - 4\theta^3} \quad (\text{IV.13})$$

Chamando  $\Omega = \omega\Delta t$  e substituindo  $\beta$  (ver Apêndice AII.1.2) em (IV.13) tem-se:

$$\frac{6\Omega^2}{\theta(6 + \theta^2\Omega^2)} = \frac{12(1 - 2\theta)}{\theta - 4\theta^3} \quad \dots$$

$$\dots (4\theta^3 - 6\theta^2 + 1) \Omega^2 - 12 + 24\theta = 0$$

Como  $\Omega$  pode assumir um valor qualquer no intervalo  $[0, \infty)$  deve-se ter

$$(a) \quad 4\theta^3 - 6\theta^2 + 1 = 0 \quad (b) \quad -12 + 24\theta = 0$$

De (a) tira-se que  $\theta_1 = 1,366025$ ,  $\theta_2 = -0,366025$  e  $\theta_3 = 0,5$ ;

De (b) tira-se que  $\theta = 0,5$ .

Para que (a) e (b) sejam satisfeitas deve-se ter  $\theta = 0,5$ .

Como  $\theta$  é sempre maior ou igual a 1 neste método, não existe nenhum valor finito de  $\Omega$  tal que  $\lambda = -1$ .

Mas quando  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow \frac{6}{\theta^3}$

Introduzindo  $\beta = \frac{6}{\theta^3}$  em (IV.13) vem:

$$\frac{2(1-2\theta)}{1-4\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} \quad \therefore \quad 4\theta^3 - 6\theta^2 + 1 = 0$$

Como  $\theta \geq 1$ , tem-se que  $\theta = 1,366025$

Portanto quando  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow -1$  para  $\theta = 1,366025$

(iii) Para todos os valores restantes de  $\phi$ ,  $\lambda$  será complexo.

Como  $\sin \phi \neq 0$  pode-se dividir (IV.10) por  $\sin \phi$ :

$$1 - 4\cos^2\phi + 2A_1\cos\phi - A_2 = 0 \quad \therefore \quad -2A_1\cos\phi = -A_2 + 1 - 4\cos^2\phi \quad (\text{IV.14})$$

Substituindo (IV.14) em (IV.9) chega-se a:

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (A_1 - A_3) \quad (\text{IV.15})$$

Introduzindo agora (IV.15) em (IV.16):

$$1 + A_1 A_3 - A_3^2 - A_2 = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Levando  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  em (IV.16) vem:

$$\beta^2 \left( \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{6} \right) + \beta\theta = 0$$

Como  $\theta \neq 0$  então  $\beta = 0 \rightarrow \Omega = 0 \rightarrow \omega\Delta t = 0$  e a solução de (IV.7) é  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 1 - \frac{1}{\theta}$ .

Logo não existe nenhum valor de  $\lambda$  complexo para o qual  $|\lambda| > 1$ .

Do caso (ii) tira-se que para  $\theta < 1,366025$ ,  $|\lambda| > 1$  portanto para que haja estabilidade incondicional deve-se ter  $\theta \geq 1,366025$  ( $\approx 1,37$ ).

Geralmente usa-se  $\theta = 1,4$ , porém Hilber (12) recomenda usar  $\theta \geq 1,420815$  para que as raízes principais sejam complexas para qualquer valor de  $\omega\Delta t$ , o que provoca dissipação numérica nos modos mais altos. Isto será discutido no item IV.3.

#### IV.2.3 - Método de Newmark

Aplicando na matriz de amplificação A deste método (ver Apêndice AII.1.3) uma transformação similar, vem:

$$\bar{A} = \underline{D}^{-1} \underline{A} \underline{D} \begin{bmatrix} -(\frac{1}{2} - \alpha)\beta & -\beta & -\beta \\ 1-\delta - (\frac{1}{2} - \alpha)\delta\beta & 1-\beta\delta & -\beta\delta \\ \frac{1}{2} - \alpha - (\frac{1}{2} - \alpha)\alpha\beta & 1-\alpha\beta & 1-\alpha\beta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

O polinômio característico de  $\bar{A}$  é:

$$\det(\bar{A} - \lambda \underline{I}) = -\lambda^3 + A_1 \lambda^2 - A_2 \lambda + A_3$$

onde

$$A_1 = 2 - \frac{\beta}{2} - \beta\delta$$

$$A_2 = 1 + \frac{\beta}{2} - \beta\delta$$

$$A_3 = 0$$

Igualando o polinômio característico a zero:

$$\lambda^3 - A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 = 0 \quad (\text{IV.18})$$

obtem-se as raízes:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 - \frac{\beta}{2} - \beta\delta \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \beta^2\delta + \beta^2\delta^2 - 4\beta}}{2}$$

que são auto-valores de  $\underline{A}$ .

$$\text{Chamando de } \Delta = \frac{\beta^2}{4} + \beta^2\delta + \beta^2\delta^2 - 4\beta = \beta^2\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 -$$

$4\beta$  o discriminante das raízes, tem-se:

$$(i) \quad \Delta \leq 0$$

$$\beta^2\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq 0 \rightarrow$$

$$\beta\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4 \quad \therefore \quad \frac{1}{4}\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{\beta} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \alpha$$

Como  $\omega \Delta t$  pode assumir um valor qualquer de 0 a  $\infty$  tem-se que:

$$\frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \alpha \rightarrow \alpha \geq \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2$$

Para este caso tem-se:

$$\lambda = \frac{2 - \frac{\beta}{2} - \beta\delta \pm i \sqrt{-\Delta}}{2}$$

Para que  $|\lambda| \leq 1$ , deve-se ter:

$$\left( 2 - \frac{\beta}{2} - \beta\delta \right)^2 + 4\beta - \beta^2\delta^2 - \beta^2\delta - \frac{\beta^2}{4} \leq 4 \quad \therefore$$

$$\therefore \beta(2 - 4\delta) - \beta^2 \frac{\delta}{2} \leq 0$$

Para  $\omega\Delta t$  assumindo um valor qualquer de 0 a  $\infty$  vem:

$$2 - 4\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq 1/2$$

$$\text{e} \quad \rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\delta}{2} \leq 0 \rightarrow \delta \geq 0$$

$$(ii) \Delta > 0 \rightarrow \alpha < \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2$$

Neste caso tem-se:

$$\lambda = \frac{2 - \frac{\beta}{2} - \beta\delta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$



e não existe nenhum valor de  $\omega\Delta t$  para o qual  $|\lambda| \leq 1$ .

Portanto para que o método seja incondicionalmente estável,  $\alpha$  e  $\delta$  devem atender às seguintes condições:

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{e} \quad \delta \geq \frac{1}{2}$$

#### IV.2.4 - Algoritmo Hermitiano Linear

Aplicando na matriz de amplificação  $\underline{A}$  deste método (ver Apêndice AII.1.4) uma transformação similar, vem:

$$\bar{\underline{A}} = \underline{D}^{-1} \underline{A} \underline{D} = \frac{1}{1 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2} \times \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 & -\omega^2 \Delta t^2 \\ 1 & 1 + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

chamando de:

$$a = 1 + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2$$

$$b = -\omega^2 \Delta t^2$$

$$d = 1 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2, \text{ vem:}$$

$$\bar{\underline{A}} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

O polinômio característica de  $\bar{A}$  é:

$$\det(\bar{A} - \lambda I) = \left(\frac{a}{d} - \lambda\right)^2 - \frac{b}{d^2}$$

Igualando o polinômio característico a zero ob-  
têm-se as raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{b}}{d}$$

que são os auto-valores de  $\bar{A}$ .

Como  $b$  é sempre negativo, os auto-valores  $\lambda$  serão  
sempre complexos conjugados:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i \sqrt{-b}}{d} \rightarrow |\lambda|^2 = \frac{a^2 - b}{d^2}$$

Para que  $|\lambda| \leq 1$  deve-se ter  $|\lambda|^2 \leq 1$  ou seja,  
 $\frac{a^2 - b}{d^2} \leq 1 \therefore$

$$\frac{1 + 2\alpha_1\beta_1\omega^2\Delta t^2 + \alpha_1^2\beta_1^2\omega^4\Delta t^4 + \omega^2\Delta t^2}{1 + 2\alpha_1^2\omega^2\Delta t^2 + \alpha_1^4\omega^4\Delta t^4} \leq 1 \therefore$$

$$\therefore \omega^4\Delta t^4(\alpha_1^2\beta_1^2 - \alpha_1^4) + \omega^2\Delta t^2(1 + 2\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1^2) \leq 0$$

Como  $\omega\Delta t$  pode assumir um valor qualquer de 0 a  $\infty$   
deve-se ter:

$$(a) \alpha_1^2 (\beta_1^2 - \alpha_1^2) \leq 0 \quad \therefore \beta_1^2 - \alpha_1^2 \leq 0 \quad \therefore$$

$$\therefore (\zeta - 1)^2 - \zeta^2 \leq 0 \rightarrow \zeta \geq 1/2$$

$$(b) 1 + 2\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1^2 \leq 0 \quad \therefore$$

$$\therefore 1 + 2\zeta(\zeta - 1) - 2\zeta^2 \leq 0 \rightarrow \zeta \geq 1/2$$

Portanto para que o algoritmo seja incondicionalmente estável ( $\rho(A) \leq 1$ ) deve-se ter  $\zeta \geq 1/2$ .

Uma outra maneira de se analisar a estabilidade deste algoritmo é a partir da solução incremental do sistema de 1.<sup>a</sup> ordem (III.26) (ver item III.4.1) que é dada por:

$$\underline{Y}_{t+\Delta t} = e^{-\Delta t \underline{A}_2} \underline{Y}_t + e^{-(t+\Delta t)\underline{A}_2} \int_t^{t+\Delta t} e^{\tau \underline{A}_2} \underline{\bar{P}}(\tau) d\tau \quad (IV.20)$$

Fazendo  $\underline{\bar{P}} = 0$  a equação (IV.20) fica:

$$\underline{Y}_{t+\Delta t} = e^{-\Delta t \underline{A}_2} \underline{Y}_t \quad (IV.21)$$

E a equação (III.35) (ver item III.4.1) fica:

$$\text{onde } R_1^\zeta = {}_1\bar{B}_{t+\Delta t}^{-1} {}_1\bar{B}_t \quad \underline{Y}_{t+\Delta t} = R_1^\zeta \underline{Y}_t \quad (IV.22)$$

Comparando (IV.21) e (IV.22) observa-se que  $R_1^\zeta$  é uma aproximação racional para a matriz de decaimento exponen-

cial e  $e^{-A_2 \Delta t}$  .. Para um grau de liberdade os auto-valores de  $A_2$  são  $\lambda^* = \pm i\omega$  e  $R_1^\zeta$  é uma aproximação racional da função de decaimento exponencial  $e^{\pm i\omega \Delta t}$ :

$$R_1^\zeta = \frac{1 + \beta_1 i\omega \Delta t}{1 + \alpha_1 i\omega \Delta t}$$

Para que haja estabilidade incondicional deve-se ter:

$$|R_1^\zeta| \leq 1 \quad \therefore \quad |R_1^\zeta|^2 \leq 1 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{1 + \beta_1^2 \omega^2 \Delta t^2}{1 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2} \leq 1$$

$$\therefore (\beta_1^2 - \alpha_1^2) \omega^2 \Delta t^2 \leq 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \beta_1^2 - \alpha_1^2 \leq 0 \rightarrow \zeta \geq 1/2$$

Observa-se que para  $\zeta = 1/2$ ,  $R_1^{1/2}$  corresponde ao operador de Padé  $R_{1,1}$  que corresponde por sua vez à regra trapezoidal.

#### Iv.2.5 - Algoritmo Hermitiano Cúbico I

Chamando de

$$a = 1 - \frac{13}{30} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \Delta t^4$$

$$b = -\omega^2 \Delta t \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2\right)$$

$$c = \Delta t \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{720} \omega^4 \Delta t^4\right) e$$

$$d = 1 + \frac{1}{15} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \Delta t^4$$

na matriz de amplificação  $\underline{A}$  deste método (ver Apêndice AII.1.5), vem:

$$\underline{A} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

Os auto-valores de  $\underline{A}$  são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{bc}}{d}$$

Para que se tenha  $|\lambda| = 1$  deve-se ter:

i)  $bc < 0$  (auto-valores complexos)

$$\text{ii) } \sqrt{\frac{a^2 - bc}{d^2}} = 1 \therefore \frac{a^2 - bc}{d^2} = 1$$

De (i) tem-se que:

$$- \omega^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2\right) \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{720} \omega^4 \Delta t^4\right) < 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2\right) \cdot \frac{1}{720} \omega^4 \Delta t^4 > 0$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2 > 0 \quad \therefore \omega^2 \Delta t^2 < 10 \quad \therefore$$

$$\therefore \omega \Delta t < \sqrt{10}$$

(ii) é satisfeita para qualquer valor de  $\omega \Delta t$ .

Logo o algoritmo é condicionalmente estável, para que  $\rho(A) \leq 1$  deve-se ter  $\omega \Delta t < \sqrt{10}$ , ou seja,  $\frac{\Delta t}{T} < 0,503$ .

Para que o algoritmo seja incondicionalmente estável deve-se ter  $|\lambda| = 1$  para qualquer valor de  $\omega \Delta t$ .

Dunne<sup>7</sup> mostrou que para que isto aconteça deve-se modificar a matriz  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \frac{1}{1 + c_3 \omega^2 \Delta t^2 + c_4 \omega^4 \Delta t^4} \times \begin{bmatrix} 1 - c_1 \omega^2 \Delta t^2 + c_2 \omega^4 \Delta t^4 & -\omega^2 \Delta t (1 - c_5 \omega^2 \Delta t^2) \\ \Delta t (1 - c_5 \omega^2 \Delta t^2) & 1 - c_1 \omega^2 \Delta t^2 + c_2 \omega^4 \Delta t^4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

Fazendo  $c_1 = \frac{5}{12}$ ,  $c_2 = c_4 = \frac{1}{144}$  e  $c_3 = c_5 = \frac{1}{12}$ ,  $|\lambda|$  será igual a 1 para qualquer valor de  $\omega \Delta t$ .

Esta modificação da matriz  $\underline{A}$  corresponde à seguinte modificação na equação (III.45) (ver item III.4.2):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{60} \underline{M}^{-1} [20\underline{F}_t + \frac{5}{2} \Delta t \dot{\underline{F}}_t + 10\underline{F}_{t+\Delta t} - \\ - \frac{5}{2} \Delta t \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}] \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Esta equação (IV.25) juntamente com a equação (III.44) define o algoritmo hermitiano cúbico I modificado para que haja estabilidade incondicional.

#### IV.2.6 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III

Aplicando na matriz de amplificação  $\underline{A}$  deste método (ver Apêndice AII.1.6) uma transformação similar, vem:

$$\bar{\underline{A}} = \underline{D}^{-1} \underline{A} \underline{D} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

onde

$$a = \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 + (1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2) (1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2)$$

$$b = \omega^2 \Delta t^2 [\beta_1 (1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2) - \alpha_1 (1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2)]$$

$$c = \alpha_1 (1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2) - \beta_1 (1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)$$

$$d = (1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2$$

Como  $b = -\omega^2 \Delta t^2 c$ ,  $bc = -\omega^2 \Delta t^2 c^2$  e portanto  $bc$  é sempre negativo e os auto-valores de  $\underline{A}$  são sempre complexos:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i \sqrt{-bc}}{d} \quad \text{e} \quad |\lambda|^2 = \frac{a^2 - bc}{d^2}$$

Para este algoritmo o cálculo de  $|\lambda|$  torna-se muito trabalhoso.

Analogamente ao que foi feito para o algoritmo hermitiano linear (ver item IV.2.4) pode-se analisar a estabilidade através da aproximação racional para a função de decaimento exponencial  $e^{\pm i\omega \Delta t}$ :

$$R_3^\zeta = \frac{1 \pm \beta_1 i\omega \Delta t - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2}{1 \pm \alpha_1 i\omega \Delta t - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2}$$

Para que haja estabilidade incondicional deve-se ter  $|R_3^\zeta| \leq 1$ .

Cálculo do valor de  $\zeta$  para o qual  $|R_3^\zeta| = 1$ :

$$|R_3^\zeta| = 1 \rightarrow \frac{|1 \pm \beta_1 i\omega \Delta t - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2|}{|1 \pm \alpha_1 i\omega \Delta t - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2|} = 1 \quad \therefore$$

$$\therefore (1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2)^2 + \beta_1^2 \omega^2 \Delta t^2 = (1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2 \quad \therefore$$



$$\therefore (\beta_2^2 - \alpha_2^2) \omega^4 \Delta t^4 + (\beta_1^2 - 2\beta_2 - \alpha_1^2 + 2\alpha_2) \omega^2 \Delta t^2 = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Como  $\omega \Delta t$  pode assumir um valor qualquer de 0 a  $\infty$  deve-se ter:

$$\text{i)} \quad \beta_2^2 - \alpha_2^2 = 0 \rightarrow \beta_2 = \pm \alpha_2$$

$$\text{ii)} \quad \beta_1^2 - \alpha_1^2 - 2\beta_2 + 2\alpha_2 = 0$$

$$\text{se } \beta_2 = \alpha_2 \text{ então } \beta_1 = \pm \alpha_1$$

$$\rightarrow \text{se } \beta_2 = -\alpha_2 \text{ então } \beta_1^2 - \alpha_1^2 + 4\alpha_2 = 0$$

Ver as expressões de  $\alpha_1, \dots, \beta_2, w_t, \dots, \bar{w}_{t+\Delta t}$  no Apêndice AI.2 e AI.3.

De (i) tem-se que:

$$\frac{\bar{w}_t}{w'_{t+\Delta t}} = \pm \frac{\bar{w}_{t+\Delta t}}{w'_{t+\Delta t}}$$

Há duas hipóteses a considerar:

$$w'_{t+\Delta t} = 0 \quad \text{ou} \quad w'_{t+\Delta t} \neq 0$$

Para  $w'_{t+\Delta t} = 0$  tem-se que:

$$6\zeta - 6\zeta^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Os valores de  $\alpha_1, \dots, \beta_2$  para  $\zeta = 0$  e  $\zeta = 1$  são:

$\zeta$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	
0	1/3	-2/3	0	1/6	(IV.28)
1	2/3	-1/3	1/6	0	

Como para  $\zeta = 0$  e  $\zeta = 1$   $\beta_2 \neq \pm \alpha_2$ , conclui-se que  $w'_{t+\Delta t} \neq 0$ , ou seja,  $\zeta \neq 0$  e  $\zeta \neq 1$ .

$$(i) \ a) \ \beta_2 = \alpha_2 + \bar{w}_t = -\bar{w}_{t+\Delta t} \quad \therefore$$

$$\therefore \zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3 = \zeta^2 - \zeta^3 \quad \therefore$$

$$\therefore 2\zeta^3 - 3\zeta^2 + \zeta = 0 \quad \begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = 1/2 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Como  $\zeta \neq 0$  e  $\zeta \neq 1$  então  $\zeta = 1/2$ .

$$(i) \ b) \ \beta_2 = -\alpha_2 + \bar{w}_t = \bar{w}_{t+\Delta t} \quad \therefore$$

$$\therefore \zeta^2 - \zeta = 0 \quad \begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Donde se conclui que não existe nenhum valor de  $\zeta$  para o qual  $\beta_2 = -\alpha_2$ .

De (ii) tem-se então que  $\beta_1 = \pm \alpha_1$ :

$$\frac{\bar{w}'_t - w_t}{w'_{t+\Delta t}} = + \frac{(w_{t+\Delta t} - \bar{w}'_{t+\Delta t})}{w'_{t+\Delta t}}$$

E novamente deve-se ter  $w'_{t+\Delta t} \neq 0$ , ou seja  $\zeta \neq 0$  e  $\zeta \neq 1$  (ver (IV.28)).

$$(ii) \ a) \ \beta_1 = \alpha_1 \rightarrow \bar{w}'_t - w_t = w_{t+\Delta t} - \bar{w}'_{t+\Delta t} \quad . \cdot .$$

$$. \cdot . \ 1 - 4\zeta + 3\zeta^2 - 1 + 3\zeta^2 - 2\zeta^3 =$$

$$= 3\zeta^2 - 2\zeta^3 + 2\zeta - 3\zeta^2 \quad . \cdot .$$

$$. \cdot . \ \zeta^2 - \zeta = 0 \quad \begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Donde se conclui que não existe nenhum valor de  $\zeta$  para o qual  $\beta_1 = \alpha_1$ .

$$(ii) \ b) \ \beta_1 = -\alpha_1 \rightarrow \bar{w}'_t - w_t = -w_{t+\Delta t} + \bar{w}'_{t+\Delta t} \quad . \cdot .$$

$$. \cdot . \ 2\zeta^3 - 3\zeta^2 + \zeta = 0 \quad \begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = 1/2 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Como  $\zeta \neq 0$  e  $\zeta \neq 1$  então  $\zeta = 1/2$ .

Logo para que  $|R_3^\zeta|$  seja igual a 1 deve-se ter  $\zeta = 1/2$  e da equação (IV.27) observa-se que para  $\zeta > 1/2$  tem-se  $|R_3^\zeta| < 1$ .

Portanto para que o algoritmo seja incondicionalmente estável deve-se ter  $\zeta \geq 1/2$ .

Observa-se que para  $\zeta = 1/2$   $R_3^{1/2}$  corresponde ao operador de Padé  $R_{3,3}$ . A matriz de amplificação  $A$  deste algoritmo para  $\zeta = 1/2$  é idêntica à dos algoritmos hermitianos cúbicos I modificado, II e IV. Portanto estes quatro algoritmos são equivalentes quanto à estabilidade e precisão, eles apresentam as mesmas propriedades, a diferença entre eles está apenas na implementação. Não será necessário, então o estudo da estabilidade dos algoritmos hermitianos cúbicos II e IV, ambos são incondicionalmente estáveis.

#### IV.3 - DECAIMENTO DE AMPLITUDE E ALONGAMENTO DO PERÍODO

Outra propriedade importante além da estabilidade é a precisão dos algoritmos, principalmente nos algoritmos incondicionalmente estáveis. Quando o algoritmo é condicionalmente estável geralmente  $\Delta t$  já é bem pequeno, pois deve ser menor do que  $\Delta t_{cr}$ , não havendo assim problemas quanto à precisão. Já nos algoritmos incondicionalmente estáveis deve-se ter cuidado ao escolher o intervalo de integração  $\Delta t$ , pois se o  $\Delta t$  escolhido for grande haverá problemas de precisão que podem ser consideráveis dependendo do caso.

Neste item serão estudadas duas grandezas: decaimento de amplitude (DA) e alongamento do período (AP) que dão a noção do erro de precisão de cada algoritmo.

Como já foi visto, analisar as propriedades das equações (II.23) equivale a estudar as propriedades da equação (IV.1) ou (IV.2). Assim como para a estabilidade, para se estudar os problemas de precisão deve-se examinar o comportamento da solução numérica para condições iniciais arbitrárias, ou seja, será considerado  $r = 0$  na equação (IV.1). Também será considerada a ausência de amortecimento físico ( $\xi = 0$ ).

Logo, para se estudar os problemas de precisão deve-se analisar a matriz de amplificação  $\underline{A}$  de cada algoritmo:

$$\hat{\underline{X}}_{t+\Delta t} = \underline{A} \hat{\underline{X}}_t \quad (\text{ver equação (IV.2)})$$

Quando a norma espectral da matriz  $\underline{A}$  for menor do que 1, ou seja quando o raio espectral de  $\underline{A}$  for menor do que 1 ( $\rho(\underline{A}) < 1$ ), o algoritmo possui um amortecimento numérico que provoca o decaimento de amplitude da solução:

$$||\hat{\underline{X}}_{t+\Delta t}|| < ||\hat{\underline{X}}_t||$$

Em porcentagem, o decaimento de amplitude é dado por:

$$DA = 100 |1 - \rho(\underline{A})| \quad (\text{IV.29})$$

Fazendo variar  $\omega \Delta t$  (ou  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{2\pi} \omega \Delta t$ ) e calculando o raio espectral  $\rho(\underline{A})$  para cada valor de  $\Delta t/T$  pode-se traçar a

curva  $DA \times \frac{\Delta t}{T}$  dos diversos algoritmos.

Na Figura (IV.1) foram traçadas as curvas  $DA \times \frac{\Delta t}{T}$  para o algoritmo hermitiano cúbico com  $\zeta = 2/3$ , o Método de Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$  e para a regra trapezoidal (hermitiano linear com  $\zeta = 1/2$  ou Newmark com  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ ).

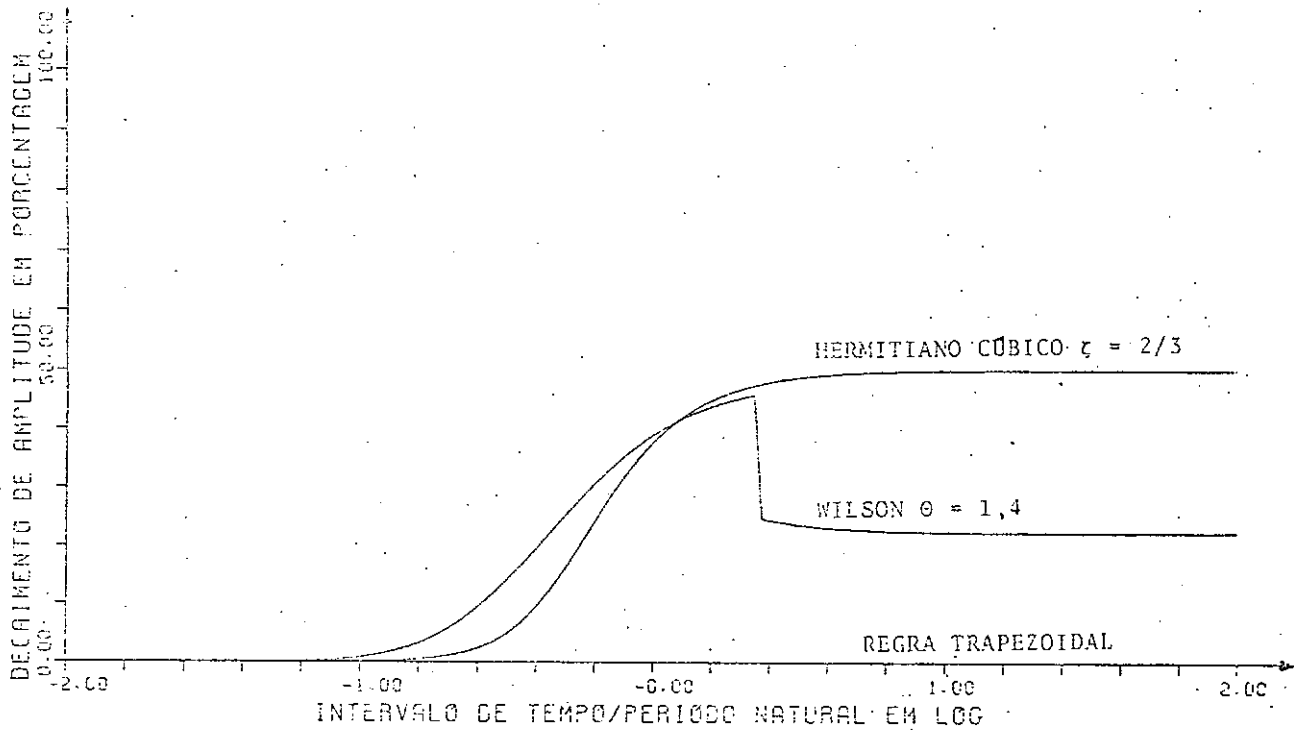


Fig. (IV.1)

O ponto de bifurcação na curva do Método de Wilson- $\theta$  ( $\theta = 1,4$ ) indica que os auto-valores da matriz  $\underline{A}$  passam de complexos para reais.

A regra trapezoidal não apresenta decaimento de amplitude pois  $\rho(A) = 1$  para qualquer valor de  $\omega\Delta t$ , o erro de precisão é devido apenas ao alongamento do período.

Na Figura (IV.2) foram traçadas as curvas DA  $\times \frac{\Delta t}{T}$  para o algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta$  variando e na Figura (IV.3) foram traçadas as curvas DA  $\times \frac{\Delta t}{T}$  para os algoritmos hermitianos linear e o cúbico III com  $\zeta = 1$  aonde observa-se a precisão superior do algoritmo cúbico.

O alongamento do período em porcentagem é dado por:

$$AP = 100\left(\frac{T'}{T} - 1\right)$$

onde  $T$  = período da solução exata

e  $T'$  = período da solução aproximada

Como os períodos são inversamente proporcionais às fases:

$$\omega\Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \quad \text{e} \quad \phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T'}$$

$\omega\Delta t$  = fase da solução exata

$\phi$  = fase da solução aproximada

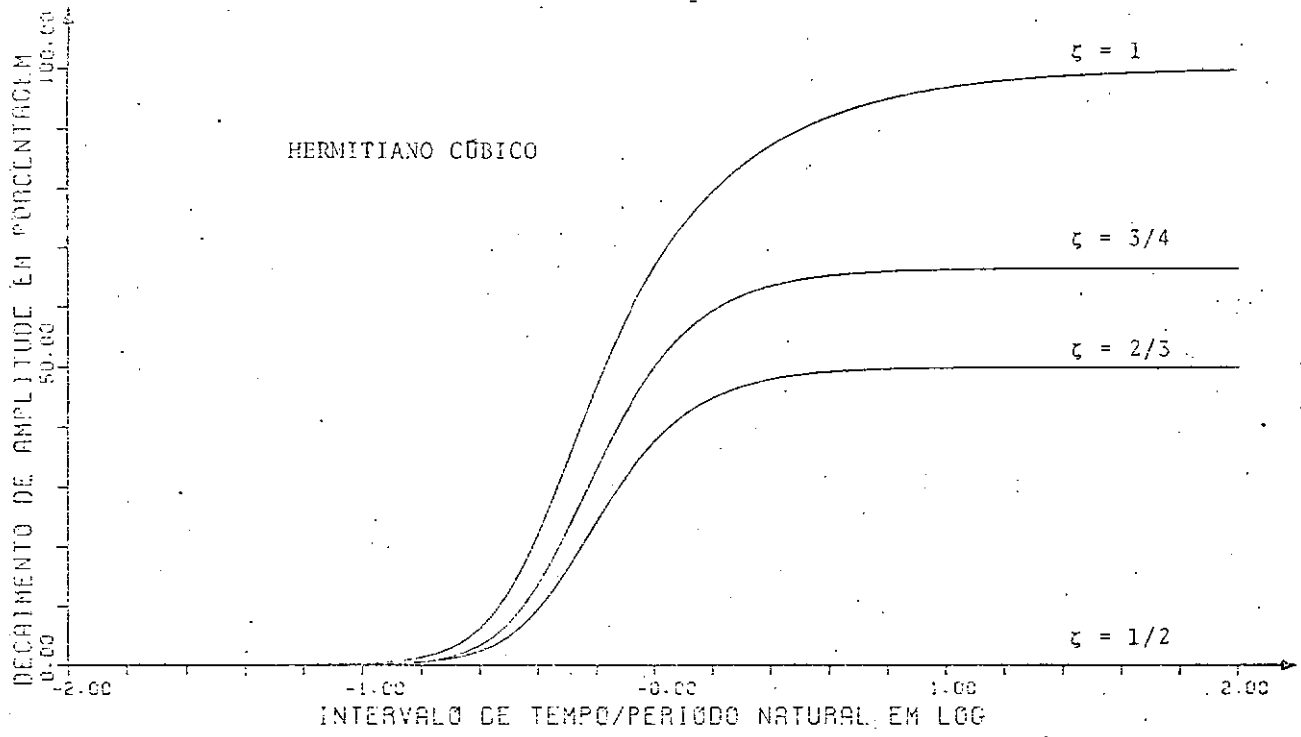


Fig. (IV.2)

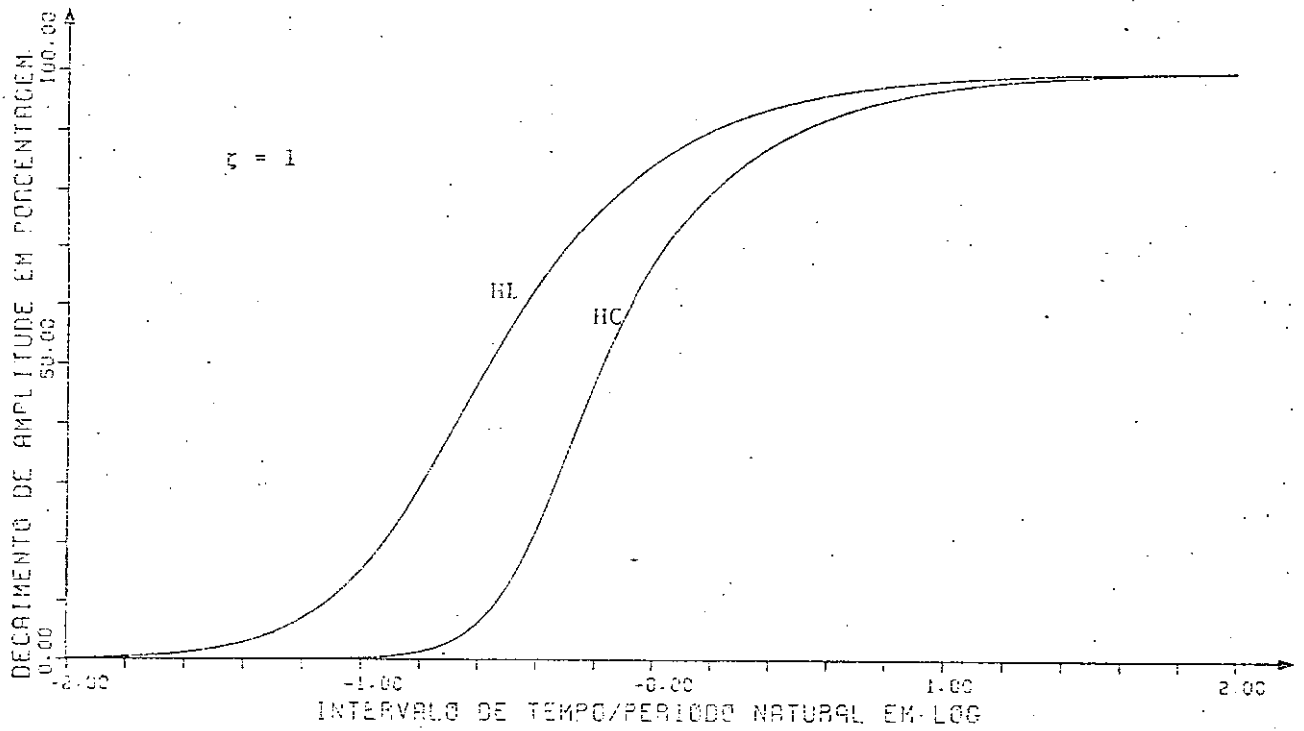


Fig. (IV.3)



Calcular o alongamento do período equivale a calcular o encurtamento da fase:

$$AP = 100 \left( \frac{\omega \Delta t}{\phi} - 1 \right) \quad (\text{IV.30})$$

Lembrando que a solução exata discretizada no tempo da equação (IV.1) com  $r = 0$  e  $\xi = 0$  é:

$$x = e^{\pm i\omega \Delta t} \quad (\text{ver item IV.2.4 e Apêndice AII.2})$$

e a solução dada pelos algoritmos é:

$$x = e^{\pm i\phi},$$

pode-se calcular  $\phi$  a partir dos auto-valores  $\lambda$  da matriz de amplificação  $\underline{A}$ :

$$\text{se } \lambda = a \pm b_i \quad \text{então } \phi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Na Figura (IV.4) foram traçadas as curvas  $AP \times \frac{\Delta t}{T}$  dos algoritmos hermitianos linear e cúbico III com  $\zeta$  variando aonde nota-se a precisão superior do algoritmo cúbico.

Na Figura (IV.5) foram traçadas as curvas  $AP \times \frac{\Delta t}{T}$  para o Método de Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$ , regra trapezoidal e algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$ . Observa-se a precisão superior da regra trapezoidal em relação ao Método de Wilson- $\theta$

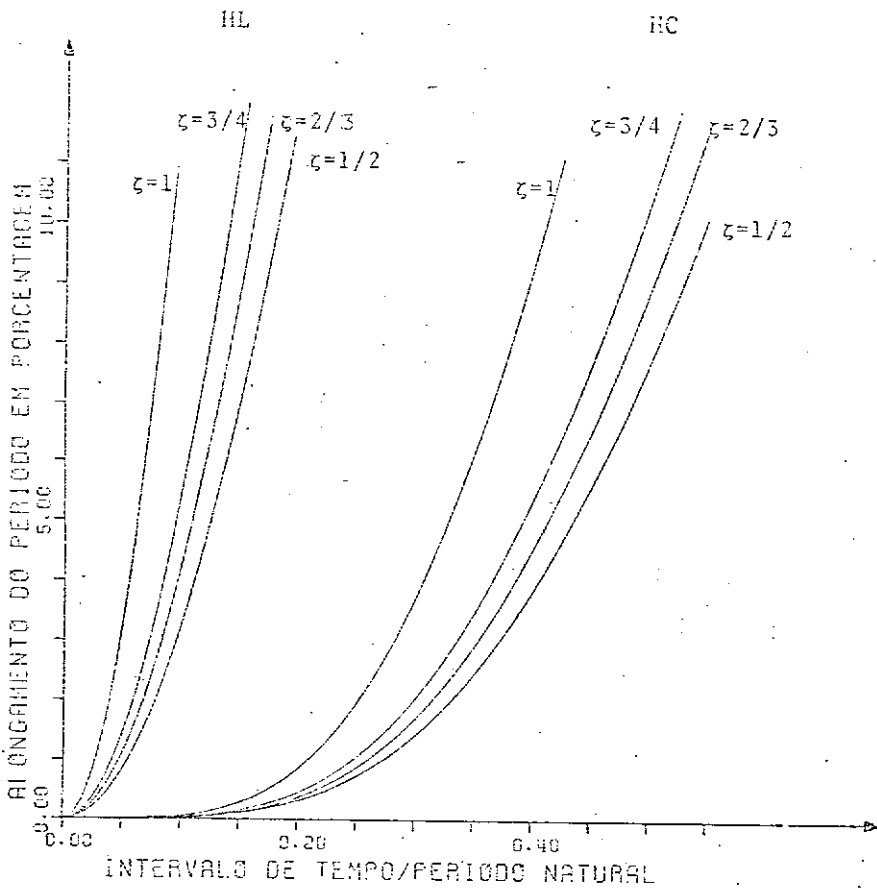


Fig. (IV.4)

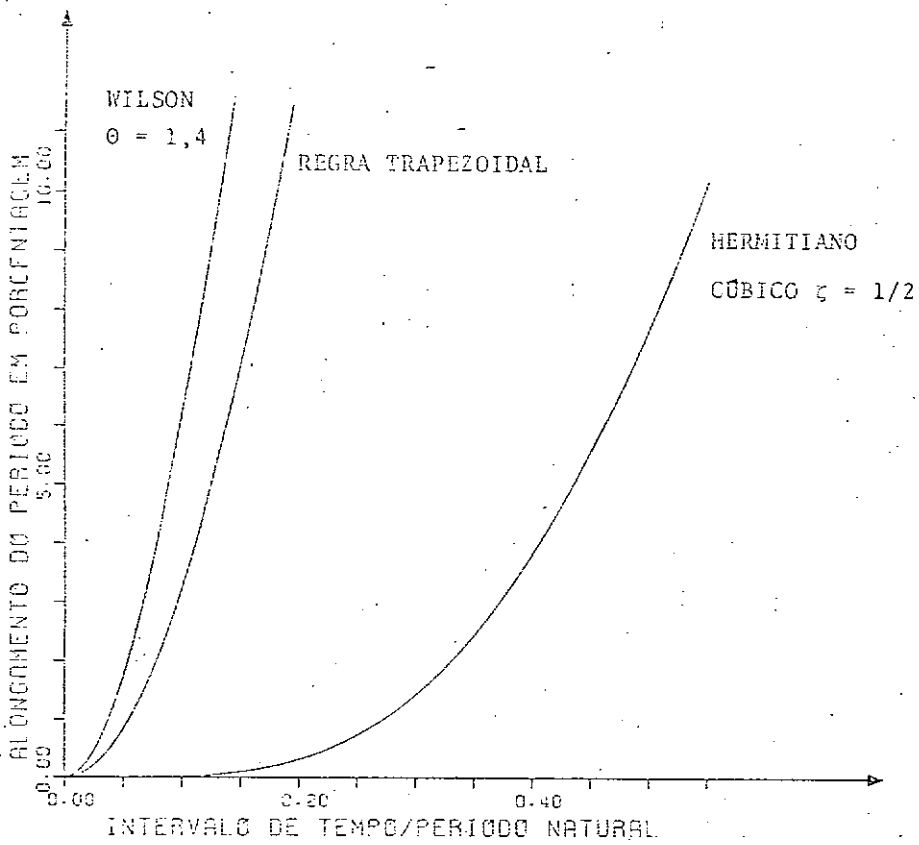


Fig. (IV.5)

( $\theta = 1,4$ ) e do algoritmo cúbico em relação aos algoritmos lineares.

Com estes gráficos de decaimento de amplitude e alongamento do período pode-se escolher aproximadamente o intervalo de integração  $\Delta t$ , em relação ao erro admissível ao problema, para cada algoritmo.

Como já foi visto, ao se escolher um intervalo de integração  $\Delta t$  pequeno em relação ao período fundamental integra-se com boa precisão o 1º modo mas pode ser que a relação  $\Delta t/T$  seja muito grande para os modos mais altos, introduzindo erro de precisão na resposta.

Um fenômeno importante é que os algoritmos que apresentam decaimento de amplitude amortecem esta falsa participação dos modos mais altos na resposta, é como se filtrassem estes modos para fora da solução. Isto não ocorre com a regra trapezoidal (hermitiano linear com  $\zeta = 1/2$  ou Newmark com  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ ) pois esta não apresenta decaimento de amplitude.

Alguns autores sugerem "corrigir" este algoritmo introduzindo um parâmetro que cause um amortecimento numérico (ver ref. (12) - família  $\alpha$  - Métodos).

O que ocorre é que ao se introduzir este parâmetro melhora-se a resposta eliminando esta falsa participação dos modos mais altos mas, por outro lado, prejudica-se a precisão

do modo fundamental na solução. Como na maioria dos casos o primeiro modo é o mais importante na solução e a participação dos modos mais altos é desprezível, não convém "corrigir" os algoritmos hermitianos ou de Newmark através da introdução deste parâmetro, segundo Argyris<sup>7</sup>, o uso de um amortecimento físico já é suficiente para amortecer a participação dos modos mais altos na resposta.

Entre os algoritmos lineares (de 2ª ordem de precisão) a regra trapezoidal tem se mostrado mais eficiente na maioria dos problemas, apresentando menor erro de precisão em relação aos demais algoritmos.

#### IV.4 - ORDEM DE PRECISÃO

A ordem de precisão dos algoritmos também é determinada analisando a matriz de amplificação  $\underline{A}$  de cada um.

Pode-se escrever a matriz  $\underline{A}$  de uma maneira aproximada:

$$\underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{A}_e$$

onde  $\underline{A}_0$  é a matriz de amplificação da solução exata (ver Apêndice AII.2) e  $\underline{A}_e$  uma matriz que contém os primeiros termos dos erros de truncamento.

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos \omega \Delta t & -\omega \sin \omega \Delta t \\ \frac{\sin \omega \Delta t}{\omega} & \cos \omega \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

Desenvolvendo em série os termos de  $\underline{A}_0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} a_{11}^0 &= a_{22}^0 = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} - \frac{\omega^6 \Delta t^6}{720} + \dots \\ a_{12}^0 &= -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{6} - \frac{\omega^6 \Delta t^5}{120} + \dots \\ a_{21}^0 &= \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{6} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{120} - \frac{\omega^6 \Delta t^7}{5040} + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Desenvolvendo em série os termos de  $\underline{A}$  dos diversos algoritmos e a seguir comparando-os com os termos de  $\underline{A}_0$ , pode-se determinar a ordem de precisão dos algoritmos: se forem iguais até os termos da ordem 2 o algoritmo terá precisão de 2.<sup>a</sup> ordem e assim por diante.

Como será visto a seguir o Método de Wilson- $\theta$  e a regra trapezoidal têm precisão de 2.<sup>a</sup> ordem e os algoritmos hermitianos cúbicos tem precisão de 3.<sup>a</sup> até 4.<sup>a</sup> ordem.

#### IV.4.1 - Método de Wilson- $\theta$

Para determinar a ordem de precisão deste método fez-se  $\theta = 1,0$  (método de aceleração linear) por simplicidade

mas a ordem de precisão será a mesma para qualquer valor de  $\theta \geq 1,0$ .

Lembrando que  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ , pode-se desenvolver em série os termos da matriz A deste método para  $\theta = 1,0$  (ver Apêndice AII.1.2):

$$a_{11} = a_{22} = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{12} - \frac{\omega^6 \Delta t^6}{72} + \dots$$

$$a_{12} = -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{4} - \frac{\omega^6 \Delta t^5}{24} + \dots \quad (\text{IV.33})$$

$$a_{21} = \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{6} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{36} - \dots$$

Comparando os termos de  $\underline{A}$  (IV.33) com os termos de  $\underline{A}_0$  (IV.32) observa-se que são iguais até os termos de ordem 2, logo este método é de 2.<sup>a</sup> ordem de precisão e:

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} & \frac{\omega^4 \Delta t^3}{12} \\ \frac{7\omega^4 \Delta t^5}{360} & \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

#### IV.4.2 - Método de Newmark

Quando  $\delta = 1/2$  a precisão deste método é no mínimo de 2.<sup>a</sup> ordem: para  $\alpha = 1/12$  a precisão é de 3.<sup>a</sup> ordem e para os

demaís valores de  $\alpha$  é de 2.<sup>a</sup> ordem. Para que o método seja incondicionalmente estável deve-se ter porém  $\alpha \geq 1/4$  para  $\delta = 1/2$ , logo a precisão será de 2.<sup>a</sup> ordem.

Tomando como exemplo a regra trapezoidal ( $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ ) e desenvolvendo em série os termos da matriz  $\underline{A}$  (ver Apêndice AII.1.3) vem:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{8} - \frac{\omega^6 \Delta t^6}{64} + \dots \\ a_{12} &= -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{4} - \frac{\omega^6 \Delta t^5}{16} + \dots \\ a_{21} &= \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{4} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{16} - \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Como os termos (IV.35) são iguais aos termos (IV.32) até a ordem 2 conclui-se que a regra trapezoidal é de 2.<sup>a</sup> ordem de precisão e:

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \frac{\omega^4 \Delta t^4}{12} & \frac{\omega^4 \Delta t^3}{12} \\ \frac{\omega^2 \Delta t^3}{12} & \frac{\omega^4 \Delta t^4}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

#### IV.4.3 - Algoritmo Hermitiano Linear

Para todos os valores de  $\zeta$  diferentes de 1/2 este algoritmo é de 1.<sup>a</sup> ordem de precisão.

Quando  $\zeta = 1/2$  a matriz de amplificação  $\underline{A}$  deste método é igual à matriz  $\underline{A}$  do método de Newmark para  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$  (regra trapezoidal, ver Apêndice AII.1.3 e AII.1.4); a matriz  $\underline{A}_e$  é idêntica à (IV.36) e o algoritmo é de 2.<sup>a</sup> ordem de precisão.

#### IV.4.4 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III

Para todos os valores de  $\zeta$  diferentes de  $1/2$  este algoritmo é de 3.<sup>a</sup> ordem de precisão.

Desenvolvendo em série os termos da matriz  $\underline{A}$  deste método para  $\zeta = 1/2$  (ver Apêndice AII.1.6) vem:

$$a_{11} = a_{22} = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{24} - 0 \times \omega^6 \Delta t^6 + \dots$$

$$a_{12} = -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{6} - \frac{\omega^6 \Delta t^5}{144} - \frac{\omega^8 \Delta t^7}{1728} + \dots \quad (\text{IV.37})$$

$$a_{21} = \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^3}{6} + \frac{\omega^4 \Delta t^5}{144} + \frac{\omega^6 \Delta t^7}{1728} - \dots$$

Comparando os termos (IV.37) com os termos (IV.32) observa-se que são iguais até os termos de ordem 4, logo para  $\zeta = 1/2$  este algoritmo é de 4.<sup>a</sup> ordem de precisão (e portanto os algoritmos hermitianos cúbicos II, IV e I modificado também o são) e neste caso:



$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \frac{\omega^6 \Delta t^6}{720} & \frac{\omega^6 \Delta t^5}{720} \\ \frac{-\omega^4 \Delta t^5}{720} & \frac{\omega^6 \Delta t^6}{720} \end{bmatrix}$$

OBS.: O algoritmo hermitiano cúbico I condicionalmente estável é um pouco mais preciso do que a sua versão modificada:

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \frac{\omega^6 \Delta t^6}{1440} & \frac{\omega^6 \Delta t^5}{720} \\ \frac{17\omega^6 \Delta t^7}{50400} & \frac{\omega^6 \Delta t^6}{1440} \end{bmatrix}$$

#### IV.5 - "OVERSHOOT"

Na referência (13) Goudreau e Taylor descobriram uma propriedade peculiar do Método Wilson- $\theta$ . Apesar do método ser incondicionalmente estável ele apresenta uma tendência de amplificar a resposta nas primeiras etapas ("overshoot").

No estudo de estabilidade foram analisadas as propriedades espectrais da matriz de amplificação  $\underline{A}$  (ver item IV.2):

$$\hat{\underline{x}}_{t+n\Delta t} = \underline{A}^n \hat{\underline{x}}_t \quad (\text{IV.38})$$

$$\underline{A}^n = \underline{P} \underline{J}^n \underline{P}^{-1} \quad (\text{IV.39})$$

aonde foi visto que  $\underline{J}^n$  é limitada quando  $n \rightarrow \infty$  se e somente se  $\rho(A) \leq 1$ .

Deve-se porê[m] estudar também a estabilidade quando  $n$  for pequeno (nas primeiras etapas) e não apenas quando  $n \rightarrow \infty$ , por isto é importante se estudar a norma da matriz  $\underline{A}$  como será visto a seguir.

Escrevendo (IV.38) para  $t = 0$  e introduzindo (IV.39) em (IV.38) vem:

$$\hat{\underline{X}}_n = \hat{\underline{X}}_{n\Delta t} = \underline{A}^n \hat{\underline{X}}_0 = \underline{P} \underline{J}^n \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_0 \quad (\text{IV.40})$$

Definindo  $|| \quad ||$  qualquer tipo de norma, por exemplo norma Euclidiana, tal que  $||\underline{J}|| = \mu$ .

OBS.: Norma Euclidiana de uma matriz é:

$$||\underline{A}|| = [\text{tr}(\underline{A} \cdot \underline{A}^T)]^{1/2}$$

Como  $\underline{P}$  é uma matriz formada de auto-vetores pode-se fazer  $||\underline{P}|| = 1$ .

Prê-multiplicando (IV.40) por  $\underline{P}^{-1}$  tem-se:

$$\underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_n = \underline{J}^n \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_0 \quad (\text{IV.41})$$

Lembrando que  $||\underline{A} \cdot \underline{B}|| \leq ||\underline{A}|| \cdot ||\underline{B}||$  e aplicando

$|| \quad ||$  em ambos os lados de (IV.41) vem:

$$|| \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_n || \leq || \underline{J}^n || \cdot || \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_0 || \dots$$

$$\dots || \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_n || \leq \mu^n || \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_0 ||$$

Se  $\mu = 1$ ,  $|| \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_n ||$  é uniformemente limitada pelo seu valor inicial;

Se  $\mu < 1$ ,  $|| \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_n || \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Aparentemente é impossível que  $\hat{\underline{X}}_n$  cresça, mas aplicando  $|| \quad ||$  em ambos os lados de (IV.40) vem:

$$|| \hat{\underline{X}}_n || = || \underline{P} \underline{J}^n \underline{P}^{-1} \hat{\underline{X}}_0 || \leq || \underline{P} \underline{J}^n \underline{P}^{-1} || \cdot || \hat{\underline{X}}_0 ||$$

ou ainda

$$|| \hat{\underline{X}}_n || \leq || \underline{P} || \cdot || \underline{J}^n || \cdot || \underline{P}^{-1} || \cdot || \hat{\underline{X}}_0 ||$$

Logo

$$|| \hat{\underline{X}}_n || \leq \mu^n || \underline{P}^{-1} || \cdot || \hat{\underline{X}}_0 || \quad (\text{IV.42})$$

Novamente tem-se que:

se  $\mu = 1$ ,  $\hat{\underline{X}}_n$  é uniformemente limitada pelo seu valor inicial;

se  $\mu < 1$ ,  $\hat{\tilde{X}}_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Mas quando  $n$  é pequeno deve-se estudar a norma de  $\tilde{P}^{-1}$  para a análise da estabilidade nas primeiras etapas.

Da equação (IV.38) tem-se que:

$$||\hat{\tilde{X}}_n|| \leq ||\tilde{A}^n|| ||\hat{\tilde{X}}_0||$$

E da equação (IV.39):

$$||\tilde{A}_n|| \leq ||\tilde{P}|| \mu^n ||\tilde{P}^{-1}||$$

Para que a matriz de amplificação seja estável ( $\mu \leq 1$ ) deve-se ter  $||\tilde{A}^n|| \leq ||\tilde{P}^{-1}||$  logo, em vez de (IV.42) pode-se escrever mais precisamente:

$$||\hat{\tilde{X}}_n|| \leq ||\tilde{A}^n|| \cdot ||\hat{\tilde{X}}_0|| \quad (\text{IV.43})$$

No estudo das primeiras etapas, o pior caso será para  $n = 1$ :

$$||\hat{\tilde{X}}_1|| \leq ||\tilde{A}|| ||\hat{\tilde{X}}_0||$$

Donde se conclui que  $\tilde{A}$  é a norma da matriz  $A$  que governa o potencial do crescimento inicial ("overshoot").

Para demonstrar que a norma de uma matriz pode ser arbitrariamente grande mesmo quando o seu raio espectral for pequeno, tomou-se o seguinte exemplo:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \epsilon & k \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

onde  $k$  é um número muito grande e  $\epsilon$  é muito pequeno.

O raio espectral da matriz  $\underline{A}$  é:

$$\rho(A) = \epsilon$$

E a norma da matriz  $\underline{A}$  é:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^T = \begin{bmatrix} k^2 + \epsilon^2 & k\epsilon \\ k\epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(\underline{A} \cdot \underline{A}^T) = 2\epsilon^2 + k^2$$

$$||\underline{A}|| = (2\epsilon^2 + k^2)^{1/2} \approx k$$

Logo tem-se que  $||\underline{A}|| \approx k$  (que é muito grande) e  $\rho(A) = \epsilon$  (que é muito pequeno).

A conclusão a que se chega é que deve-se verificar também a norma da matriz de amplificação  $\underline{A}$  para ver se há tendência de "overshoot", além de se analisar o raio espectral de  $\underline{A}$  nos estudos de estabilidade.

Uma outra maneira de verificar se há tendência de "overshoot" é através da norma de energia do algoritmo (ver ref. (12)).

Na Figura (IV.6) foram traçados gráficos para a regra trapezoidal, o algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$  e o método de Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$ , dos deslocamentos e velocidades ao longo do tempo de um problema de vibração livre com um grau de liberdade em que se considerou:

$$\Delta t = 10 T, \omega = 1, x_0 = 1 \text{ e } \dot{x}_0 = 0.$$

Através destes gráficos pode-se notar que os algoritmos regra trapezoidal (os de Newmark e hermitiano linear, em geral, também) e hermitianos cúbicos não apresentam tendência de "overshoot" enquanto que o de Wilson- $\theta$  amplifica cerca de 500 vezes o deslocamento inicial para este exemplo.

É evidente que esta enorme amplificação é devida ao fato do  $\Delta t$  escolhido ser muito grande; para  $\Delta t < T$  o método de Wilson- $\theta$  apresenta uma pequena amplificação inicial.

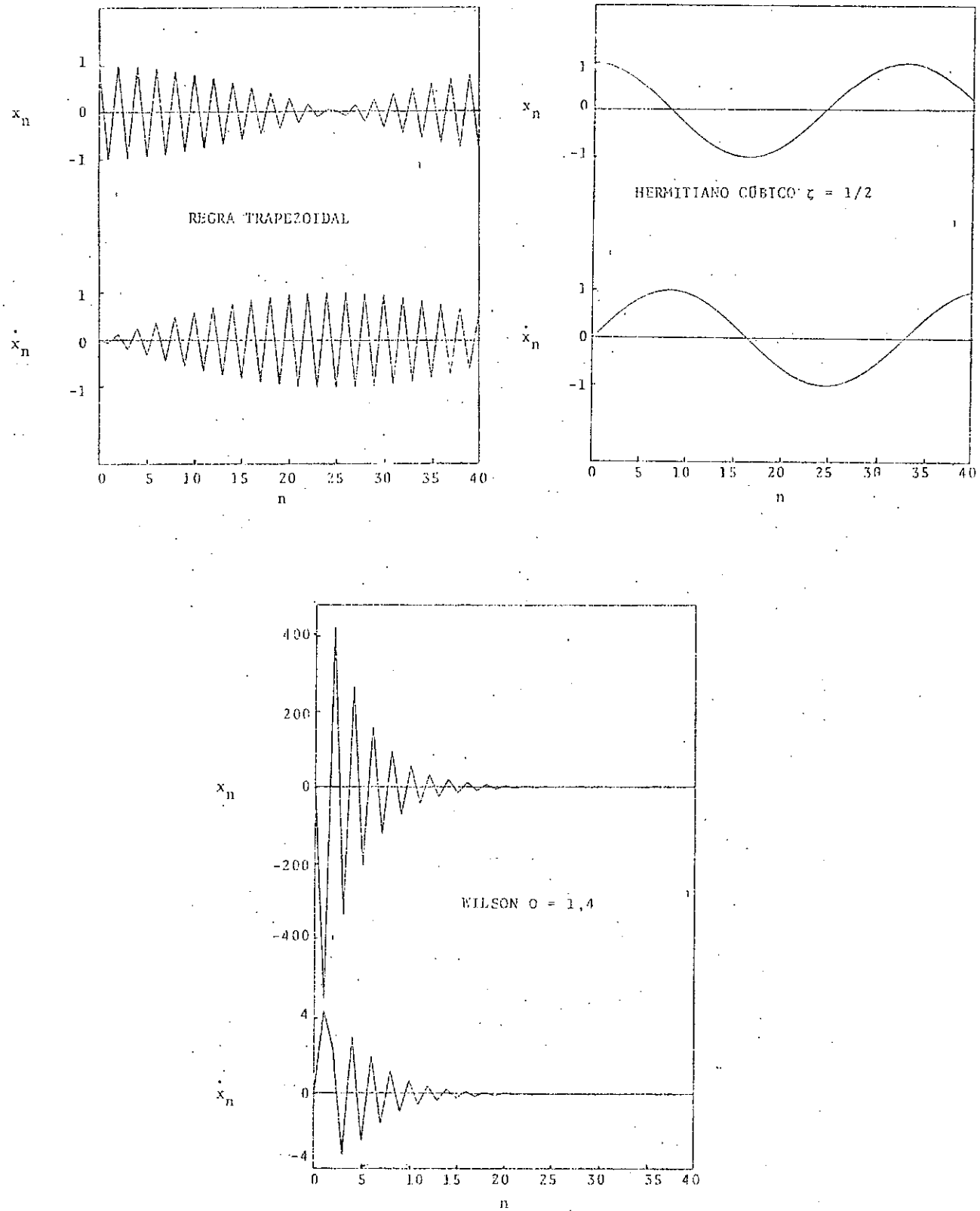


Fig. (IV.6)

Observa-se também que esta amplificação vai diminuindo e é suprimida após as primeiras etapas devido ao amortecimento numérico.

#### IV.6 - DISCUSSÕES INICIAIS - DEFINIÇÃO DOS ALGORITMOS A SEREM COMPARADOS

Após o estudo das propriedades dos algoritmos de integração direta, já é possível definir alguns algoritmos mais eficientes entre os oito formulados no capítulo anterior.

Inicialmente, pode-se eliminar o algoritmo hermitiano cúbico II pois este deve resolver um sistema  $2n \times 2n$  a cada etapa (ver itens IV.1 e III.4.3) e portanto não é competitivo em relação aos demais algoritmos.

Para garantir que haja estabilidade qualquer que seja o  $\Delta t$  escolhido, convém utilizar os algoritmos incondicionalmente estáveis ou seja, os algoritmos implícitos: Wilson- $\theta$ , Newmark, Hermitiano linear e Hermitianos cúbicos III e IV.

Convém ressaltar no entanto que, para problemas de muitos graus de liberdade (da ordem de 1000), nos algoritmos implícitos o esforço computacional para a resolução do sistema a cada etapa é muito grande e, por motivos de precisão, deve-se escolher um  $\Delta t$  muito pequeno, o que justifica o uso dos algoritmos explícitos condicionalmente estáveis (Método das Diferenças Centrais e algoritmo hermitiano cúbico I).



Não serão tratados porém, neste trabalho, problemas desta ordem de grandeza.

Entre os algoritmos lineares, a regra trapezoidal (Newmark com  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$  ou hermitiano linear com  $\zeta = 1/2$ ) costuma ser o mais preciso. O algoritmo de Wilson- $\theta$  (será adotado  $\theta = 1,4$ ) é geralmente menos preciso, ele possui um amortecimento numérico que filtra a falsa participação dos modos mais altos mas pode prejudicar o modo fundamental. Deve-se ter cuidado ao se utilizar este algoritmo com a escolha do  $\Delta t$  para que não haja tendência de "overshoot", principalmente nos problemas de impacto que são de curta duração.

Entre os algoritmos cúbicos o mais preciso é o algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$  que equivale ao algoritmo hermitiano cúbico IV. Este último será eliminado deste trabalho pois, apesar da matriz de rigidez efetiva, manter a esparsidade inicial das matrizes  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$ , o sistema a resolver ( $n \times \ell f$ ) é complexo. Aplicando em sistemas complexos os métodos usuais de resolução de sistemas (Gauss, Cholesky), surgem erros numéricos devido às sucessivas divisões pelo elemento pivot, além disso o esforço computacional será maior. Se forem aplicadas outras técnicas para resolução de sistemas complexos (ver ref. (19)) talvez este algoritmo passe a ser competitivo com os demais.

Como a precisão do algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$  é superior à dos algoritmos lineares ( $4^{\text{a}}$  ordem

em vez de 2.<sup>a</sup> ordem), escolhendo um  $\Delta t$  bem maior do que o usado para os algoritmos lineares consegue-se obter o mesmo erro de precisão na resposta. Logo será necessário efetuar um número menor de etapas, entretanto o esforço computacional de cada etapa (além do esforço computacional necessário à fatoração da matriz de rigidez efetiva) será bem maior pois no algoritmo cúbico a matriz de rigidez efetiva perde a esparsidade inicial das matrizes  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$ , o que implica em se resolver um sistema  $n \times n$  em vez de  $n \times \ell f$ .

O algoritmo mais eficiente será o que apresentar menor esforço computacional para o mesmo erro de precisão na resposta do problema. Este é o objetivo do trabalho: determinar qual o algoritmo mais eficiente entre a regra trapezoidal (implementada de duas maneiras: algoritmo de Newmark com  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$  e algoritmo hermitiano linear com  $\zeta = 1/2$ ), o algoritmo de Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$  e o algoritmo hermitiano cúbico III com  $\zeta = 1/2$ , medindo o esforço computacional de cada algoritmo escolhendo para cada um deles um  $\Delta t$  tal que se obtenha o mesmo erro de precisão na resposta do problema.

Isto será feito no Capítulo VI através de exemplos variando o número de graus de liberdade. No próximo capítulo são apresentados os esquemas de implementação computacional dos algoritmos citados acima que serão comparados no Capítulo VI.

## CAPÍTULO V

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS ALGORITMOS

#### V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os esquemas para implementação computacional dos algoritmos que serão comparados no Capítulo VI.

O Apêndice III contém uma descrição do programa SAND-AID que é baseado nestes esquemas e foi desenvolvido para aplicação dos exemplos do Capítulo VI.

Estes esquemas são divididos em duas partes:

A primeira parte (Esquema A), que é comum a todos os algoritmos, consiste na leitura e impressão dos dados da estrutura, montagem das matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  e leitura de dados dos carregamentos e vetores iniciais  $\underline{U}_0$  e  $\underline{U}_0..$

A segunda parte (Esquema B) é diferente para cada algoritmo e é subdividida em três partes:

A primeira (B.1) para o cálculo de vetores ou matrizes iniciais quando for necessário; a segunda (B.2) para o cálculo das constantes, montagem e triangularização da matriz de rigidez efetiva. A última parte (B.3), efetuada a cada etapa,

calcula o vetor de cargas efetivo e resolve o sistema de equações por retrossubstituição obtendo os vetores de deslocamentos, velocidades, etc.

## V.2 - ESQUEMA COMPUTACIONAL COMUM A TODOS OS ALGORITMOS

### ESQUEMA A

1. Leitura dos dados gerais da estrutura.
2. Leitura dos dados de carregamento, dos vetores de deslocamentos e velocidades iniciais  $\underline{U}_0$  e  $\dot{\underline{U}}_0$  e do intervalo de integração  $\Delta t$ .
3. Montagem das matrizes de rigidez  $\underline{K}$  e de massa  $\underline{M}$  (discreta ou consistente) e cálculo da matriz de amortecimento  $\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$ .
4. Montagem do vetor de cargas inicial  $\underline{R}_0$ .

### V.3 - MÉTODO DE WILSON- $\theta$

#### ESQUEMA B.1

1. Cálculo do vetor de acelerações inicial:

$$\ddot{\underline{U}}_0 = \underline{M}^{-1} (\underline{R}_0 - \underline{C} \dot{\underline{U}}_0 - \underline{K} \underline{U}_0)$$

#### ESQUEMA B.2

1. Leitura do parâmetro  $\theta$  e cálculo das constantes:

$$a_0 = \frac{6}{\theta \Delta t} \quad a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2} \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}$$

$$a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t} \quad a_4 = \frac{a_0}{\theta} \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2}$$

$$a_2 = 2a_1 \quad a_5 = -\frac{a_2}{\theta} \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

2. Cálculo da matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}$$

3. Triangularização da matriz  $\hat{\underline{K}}$  pelo método de Gauss:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{L} \underline{S}$$

ESQUEMA B.3 (para cada etapa)

1. Montagem do vetor de cargas  $\underline{R}_{t+\Delta t}$

2. Cálculo do vetor de cargas efetivo:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{R}}_{t+\theta\Delta t} = & \underline{R}_t + \theta(\underline{R}_{t+\Delta t} - \underline{R}_t) + \underline{M}(a_0 \underline{U}_t + a_2 \dot{\underline{U}}_t + 2\ddot{\underline{U}}_t) + \\ & + \underline{C}(a_1 \underline{U}_t + 2\dot{\underline{U}}_t + a_3 \ddot{\underline{U}}_t)\end{aligned}$$

3. Cálculo de  $\underline{U}_{t+\theta\Delta t}$  - Resolução do sistema:

$$\underline{L} \underline{S} \underline{U}_{t+\theta\Delta t} = \hat{\underline{R}}_{t+\theta\Delta t}$$

4. Cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações no instante  $t + \Delta t$ :

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_4(\underline{U}_{t+\theta\Delta t} - \underline{U}_t) + a_5 \dot{\underline{U}}_t + a_6 \ddot{\underline{U}}_t$$

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + a_7(\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\underline{U}}_t)$$

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + a_8(\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + 2\ddot{\underline{U}}_t)$$

5. Impressão de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$

#### V.4 - MÉTODO DE NEWMARK

##### ESQUEMA B.1

1. Cálculo do vetor de acelerações inicial:

$$\ddot{\underline{U}}_0 = \underline{M}^{-1}(\underline{R}_0 - \underline{C} \dot{\underline{U}}_0 - \underline{K} \underline{U}_0)$$

##### ESQUEMA B.2

1. Leitura dos parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e cálculo das constantes:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_6 = \Delta t (1 - \delta)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

2. Cálculo da matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \underline{M} + a_1 \underline{C}$$

3. Triangularização da matriz  $\hat{\underline{K}}$  pelo método de Gauss:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{L} \underline{S}$$

ESQUEMA B.3 (para cada etapa)

1. Montagem do vetor de cargas  $\underline{R}_{t+\Delta t}$ .

2. Cálculo do vetor de cargas efetivo:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{R}}_{t+\Delta t} = & \underline{R}_{t+\Delta t} + \underline{M}(a_0 \underline{U}_t + a_2 \dot{\underline{U}}_t + a_3 \ddot{\underline{U}}_t) + \\ & + \underline{C}(a_1 \underline{U}_t + a_4 \dot{\underline{U}}_t + a_5 \ddot{\underline{U}}_t)\end{aligned}$$

3. Cálculo de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  - Resolução do sistema:

$$\underline{L} \underline{S} \underline{U}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_{t+\Delta t}$$

4. Cálculo das acelerações e velocidades no instante  $t + \Delta t$ :

$$\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = a_0(\underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_t) - a_2 \dot{\underline{U}}_t - a_3 \ddot{\underline{U}}_t$$

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + a_6 \ddot{\underline{U}}_t + a_7 \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$$

5. Impressão de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$



## V.5 - ALGORITMO HERMITIANO LINEAR

### ESQUEMA B.2

1. Leitura do parâmetro  $\zeta$ , cálculo das constantes e matrizes auxiliares:

$$\alpha_1 = \zeta$$

$$\beta_1 = \alpha_1 - 1$$

$$\underline{A}_1 = \Delta t \underline{M}$$

$$\underline{A}_2 = \underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1 \beta_1 \Delta t^2 \underline{K}$$

2. Cálculo da matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{C} + \alpha_1^2 \Delta t^2 \underline{K}$$

3. Triangularização da matriz  $\hat{\underline{K}}$  pelo método de Gauss:

$$\hat{\underline{K}} = \underline{L} \underline{S}$$

ESQUEMA B.3 (para cada etapa)

1. Montagem do vetor de cargas  $\underline{R}_{t+\Delta t}$ .

2. Cálculo do vetor de cargas efetivo:

$$\hat{\underline{R}}_{t+\Delta t} = \underline{A}_1 \dot{\underline{U}}_t + \underline{A}_2 \underline{U}_t + \alpha_1 \Delta t^2 (\alpha_1 \underline{R}_{t+\Delta t} - \beta_1 \underline{R}_t)$$

3. Cálculo de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  - Resolução do sistema:

$$\underline{L} \underline{S} \underline{U}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_{t+\Delta t}$$

4. Cálculo das velocidades no instante  $t + \Delta t$ :

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha_1 \Delta t} [\underline{U}_{t+\Delta t} + \beta_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_t - \underline{U}_t]$$

5. Impressão de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$ .

## V.6 - ALGORITMO HERMITIANO CÚBICO III

### ESQUEMA B.1

1. Cálculo das matrizes  $\underline{M}^{-1} \underline{K}$  e  $\underline{M}^{-1} \underline{C}$
2. Cálculo do vetor  $\underline{\bar{R}}_0 = \underline{M}^{-1} \underline{R}_0$

### ESQUEMA B.2

1. Leitura do parâmetro  $\zeta$ , das constantes e matrizes auxiliares:

Ver no Apêndice AI.3 as expressões das constantes:

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a_1, a_2, \dots, a_5, b_1, b_2, \dots, b_5, c_1, c_2, c_3,$   
 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_5, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3;$

$\psi_1, \psi_2, d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  quando  
 se tratar de interpolação linear das forças externas:

$\psi_3, \psi_4, \psi_5, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{g}_1,$   
 $\bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{h}_1, \bar{h}_2$  quando se tratar de interpolação cúbica das  
 forças externas.

$$\underline{B}_{11} = \underline{M} + b_1 \underline{C} + b_2 \underline{K} + b_3 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} + b_4 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{C} + b_5 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K}$$

$$\underline{B}_{12} = c_1 \underline{K} + c_2 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K} + c_3 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K}$$

$$\underline{B}_{21} = \underline{\bar{c}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{c}}_2 \underline{C} + \underline{\bar{c}}_3 \underline{K}$$

$$\underline{B}_{22} = \underline{M} + \underline{\bar{b}}_1 \underline{C} + \underline{\bar{b}}_2 \underline{K} + \underline{\bar{b}}_3 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} + \underline{\bar{b}}_4 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K} + \underline{\bar{b}}_5 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K}$$

Para o caso de interpolação linear das forças externas:

$$\underline{D}_{11} = \underline{d}_1 \underline{M} + \underline{d}_2 \underline{C} + \underline{d}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{12} = \underline{e}_1 \underline{M} + \underline{e}_2 \underline{C} + \underline{e}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{21} = \underline{\bar{d}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{d}}_2 \underline{C} + \underline{\bar{d}}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{22} = \underline{\bar{e}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{e}}_2 \underline{C} + \underline{\bar{e}}_3 \underline{K}$$

Para o caso de interpolação cúbica das forças externas:

$$\underline{D}_{11} = \underline{f}_1 \underline{M} + \underline{f}_2 \underline{C} + \underline{f}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{12} = \underline{g}_1 \underline{M} + \underline{g}_2 \underline{C} + \underline{g}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{13} = \underline{h}_1 \underline{M} + \underline{h}_2 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{21} = \underline{\bar{f}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{f}}_2 \underline{C} + \underline{\bar{f}}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{22} = \underline{\bar{g}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{g}}_2 \underline{C} + \underline{\bar{g}}_3 \underline{K}$$

$$\underline{D}_{23} = \underline{\bar{h}}_1 \underline{M} + \underline{\bar{h}}_2 \underline{C}$$

2. Cálculo da matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{M}} + a_1 \underline{\underline{C}} + a_2 \underline{\underline{K}} + a_3 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}} + a_4 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} + a_5 \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$$

3. Triangularização da matriz  $\hat{\underline{\underline{K}}}$  pelo método de Gauss

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{S}}$$

ESQUEMA B.3 (para cada etapa)

1. Montagem do vetor de cargas  $\underline{R}_{t+\Delta t}$ .
2. Cálculo do vetor  $\underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} = \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t}$ ; para o caso de interpolação cúbica das forças externas calcular também  $\underline{\bar{R}}_{t+\zeta\Delta t} = \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\zeta\Delta t}$ .
3. Cálculo dos vetores de cargas efetivos:

No caso de interpolação linear das forças externas:

$$\hat{\underline{R}}_1 = \underline{D}_{11} \underline{\bar{R}}_t + \underline{D}_{12} \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t}$$

$$\hat{\underline{R}}_2 = \underline{D}_{21} \underline{\bar{R}}_t + \underline{D}_{22} \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t}$$

No caso de interpolação cúbica das forças externas:

$$\hat{\underline{R}}_1 = \underline{D}_{11} \underline{\bar{R}}_t + \underline{D}_{12} \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} + \underline{D}_{13} \underline{\bar{R}}_{t+\zeta\Delta t}$$

$$\hat{\underline{R}}_2 = \underline{D}_{21} \underline{\bar{R}}_t + \underline{D}_{22} \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} + \underline{D}_{23} \underline{\bar{R}}_{t+\zeta\Delta t}$$

4. Cálculo de  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$  e  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  - Resolução dos sistemas:

$$\underline{L} \underline{S} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_1$$

$$\underline{L} \underline{S} \underline{U}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{R}}_2$$

5. Impressão de  $\underline{U}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$

## CAPÍTULO VI

### COMPARAÇÃO DOS ALGORITMOS

#### VI.1 - CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO DOS ALGORITMOS

Neste capítulo serão comparados os seguintes algoritmos: regra trapezoidal (RT), implementada de duas maneiras: Newmark com  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$  (N) e Hermitiano Linear com  $\zeta = 1/2$  (HL); Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$  (W) e Hermitiano Cúbico III com  $\zeta = 1/2$  (HCL com interpolação linear das formas externas e HCC com interpolação cúbica). Será mais eficiente aquele que apresentar menor esforço computacional para o mesmo erro de precisão na resposta do problema.

Neste trabalho a expressão erro de precisão refere-se ao erro relativo da solução aproximada em relação à solução exata. A solução do problema pode ser dada em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações ou esforços. Observa-se que como os algoritmos que serão comparados neste capítulo foram formuladas em termos de deslocamentos (ver Capítulo III), o erro relativo encontrado para os deslocamentos será menor do que o encontrado para as velocidades que por sua vez será menor do que o para as acelerações. Observa-se também que o erro relativo é função da posição e do tempo. Seja por exemplo, um problema em que a resposta é dada em termos de deslocamentos, para um dado nó  $j$  num certo instante  $t_j$  tem-se que:

$$\varepsilon = \frac{u - u_0}{u_0}$$

onde  $u$  é o deslocamento aproximado do nó  $j$  no instante  $t_i$  e  $u_0$  é o deslocamento exato do nó  $j$  no instante  $t_i$

Será calculado um valor médio do erro relativo da solução aproximada dada por cada algoritmo em relação à solução exata do problema.

O esforço computacional será medido através do custo em USC obtido pela soma de duas parcelas: custo devido ao tempo de processamento e custo devido ao integral de memória. Não serão levados em conta os custos devidos a entrada e saída e linhas impressas pois os dados da estrutura do problema são os mesmos para todos os algoritmos e o número de etapas impressas será mantido constante para todos os intervalos de integração  $\Delta t_i$ .

A fórmula para se obter o custo total é dada por:

$$CT(USC) = 3,60 \times TP + 0,06 \times IM \quad (VI.1)$$

onde CT é o custo total

TP é o tempo de processamento e

IM é o integral de memória.

Para facilitar a análise, dividiu-se o tempo de processamento em 4 parcelas:



$$TP = T0 + T1 + T2 + s \times T3 \quad (VI.2)$$

onde  $T0$  é o tempo gasto para processar o esquema A

$T1$  é o tempo gasto para processar o esquema B.1

$T2$  é o tempo gasto para processar o esquema B.2

$T3$  é o tempo gasto para processar o esquema B.3 e

$s$  é o número de etapas

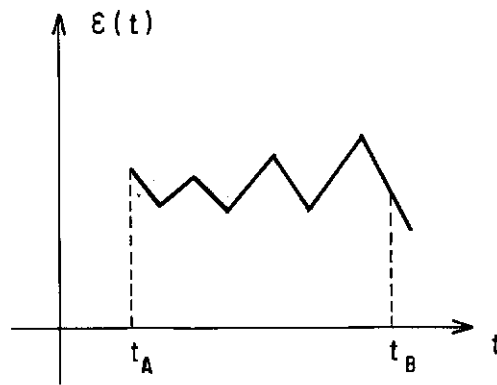
(ver Capítulo V).

Para determinar qual o algoritmo mais eficiente para um dado problema com  $n$  graus de liberdade estabeleceu-se o seguinte critério:

- . Escolher os intervalos de integração  $\Delta t_i$  (no mínimo 4).
- . Fixar a posição, ou seja, escolher um ou mais nós da estrutura aonde será calculada a resposta ao longo do tempo.
- . Para cada  $\Delta t_i$ , processar o programa SAND-AID de cada algoritmo para a estrutura do problema (medindo o tempo de processamento e o integral de memória) e calcular:
  - 1º) O erro relativo da solução aproximada em relação à exata (em porcentagem) ao longo do tempo. Quando não for possível calcular a solução exata do problema, será considerada "exata" a solução aproximada obtida usando o algoritmo da regra trapezoidal com um  $\Delta t$  muito pequeno.

2º) O erro relativo médio (em porcentagem):

$$EM = \frac{\int_{t_A}^{t_B} \varepsilon(t) dt}{t_B - t_A} \quad (VI.3)$$



Usando a Regra de Simpson tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \varepsilon(t) dt &= \frac{(t_B - t_A)}{3(N-1)} \times (\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \dots + 4\varepsilon_{N-1} + \varepsilon_N) = \\ &= \frac{(t_B - t_A)}{3(N-1)} \times \Sigma \end{aligned} \quad (VI.4)$$

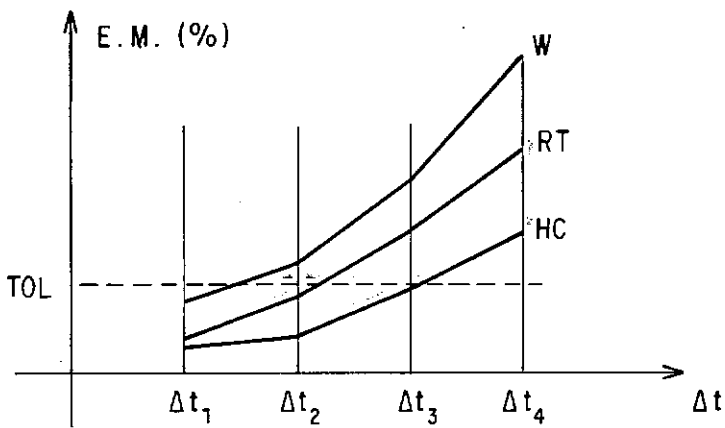
onde  $N$  = número de instantes discretos ( $N$  deve ser ímpar)

Substituindo (VI.4) em (VI.3), vem:

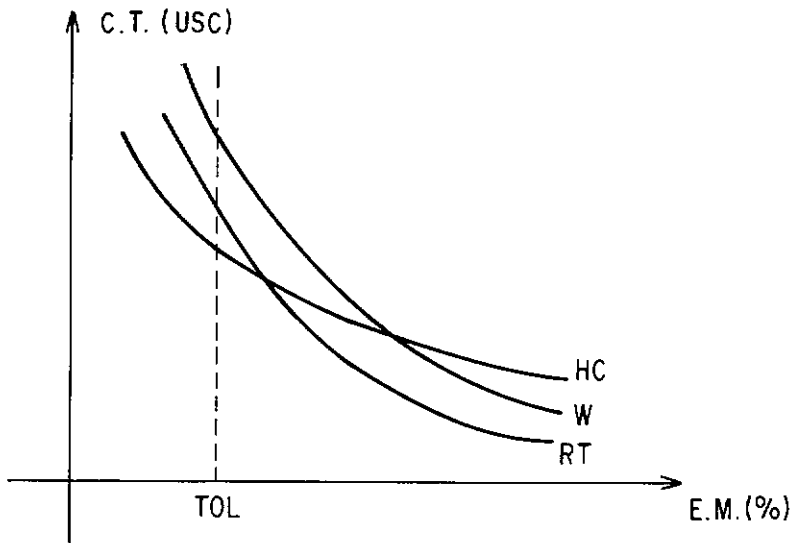
$$EM = \frac{\Sigma}{3(N-1)} \quad (VI.5)$$

3º) O custo total pela fórmula (VI.1), traçando em seguida os seguintes gráficos:

1. Erro médio x intervalo de integração (EM x  $\Delta t$ )



## 2. Custo total x erro médio (CT x EM)



Do primeiro gráfico (EM x  $\Delta t$ ) pode-se determinar qual o  $\Delta t$  necessário, para cada algoritmo, para obter-se uma certa tolerância (TOL) no erro de precisão da resposta.

Do segundo gráfico (CT x EM) pode-se determinar qual o custo de cada algoritmo gasto para obter-se esta certa tolerância (TOL), o algoritmo que apresentar menor custo será o mais eficiente.

### VI.2 - EXEMPLO 1 - HASTE SUJEITA A CARREGAMENTO RESSONANTE

Tomou-se como primeiro exemplo a haste da Figura (VI.1), com uma extremidade fixa e a outra livre aonde foi aplicada uma carga senoidal de amplitude 500 N e período igual ao

fundamental da estrutura ( $T_1$ ). A haste, cuja seção é constante e quadrada (1 cm x 1 cm) foi discretizada em 40 elementos (barra sujeita a deformação axial) e as constantes do material empregado (aço doce), módulo de Young e massa específica, foram respectivamente:

$$E = 20.580.000 \text{ N/cm}^2 \quad \text{e} \quad \rho = 0,764 \times 10^{-4} \text{ N s}^2/\text{cm}^4$$

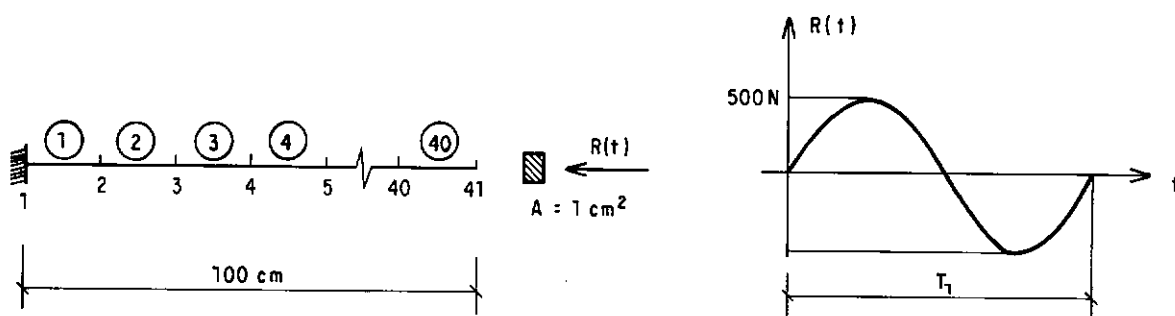


FIG. (VI-1)

Como a estrutura tem 41 nós com apenas 1 grau de liberdade por nó (NDESNO = 1), trata-se de um problema de 41 graus de liberdade e sendo a diferença máxima na numeração dos nós (IDIF) igual a 1, a largura da semi-banda das matrizes da estrutura é igual a 2.

Considerou-se neste exemplo a matriz de massa consistente e a matriz de amortecimento nula. Fixou-se o elemento 1

para o cálculo do esforço normal ( $\sigma$ ) ao longo do tempo (de  $t = 0$  a  $t = T_1$ ).

Cálculo da solução exata do problema:

Este é um problema típico de propagação de ondas unidimensional e, considerando a haste contínua, pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\rho A \ddot{u}(x, t) - E A u''(x, t) = r(x, t) \quad (\text{VI.6})$$

A partir da solução homogênea de (VI.6) obtém-se as frequências naturais de vibração da estrutura:

$$\rho A \ddot{u}(x, t) - E A u''(x, t) = 0$$

ou

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0 \quad (\text{VI.7})$$

onde  $c^2 = \frac{E}{\rho}$  e  $c$  é a velocidade de propagação da onda.

Aplicando a Transformada de Fourier em (VI.7) vem:

$$-\omega^2 u(x) - c^2 u''(x) = 0 \quad \therefore$$

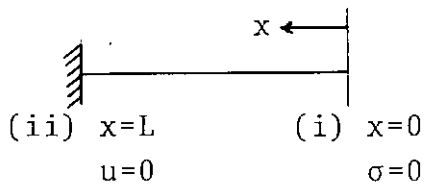
$$\therefore u''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} u(x) = 0$$

Cuja solução é:

$$u(x) = B_1 \cos \frac{\omega x}{c} + B_2 \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c} \quad . \cdot .$$

$$\therefore \sigma(x) = E u'(x) = E \left( -\frac{B_1 \omega}{c} \operatorname{sen} \omega x + \frac{B_2 \omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right)$$

As condições de contorno do problema são:



De (i) tem-se que:

$$E \left( \frac{B_2 \omega}{c} \times 1 \right) = 0 \rightarrow B_2 = 0$$

E de (ii):

$$B_1 \cos \frac{\omega L}{c} = 0$$

Como  $B_1$  é diferente de zero:

$$\cos \frac{\omega L}{c} = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{c} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \dots$$

$$\dots \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L}$$

onde  $\omega_n$  são as frequências naturais da estrutura.

Para  $n = 1$  tem-se o primeiro modo da estrutura:

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2L}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4L}{c} \text{ (período fundamental da estrutura)}$$

Como a carga aplicada à haste tem o período de aplicação igual ao fundamental ( $T_1$ ), as ondas de deslocamento ( $u$ ) e de tensão ( $\sigma$ ) que se deslocam com a velocidade  $c$  atingirão a extremidade fixa ( $x = L$ ) no instante  $t = \frac{T_1}{4} (= \frac{L}{c})$ .

Neste problema só irão interessar as ondas de tensão. Lembrando que ao atingir uma extremidade fixa a onda de tensão se reflete com o mesmo sinal da onda incidente e na extremidade livre ela se reflete com o sinal contrário ao da onda incidente, pode-se traçar o diagrama da onda de tensão ao longo da haste (cuja área  $A$  é  $1 \text{ cm}^2$ ) nos instantes  $t = T_1/4, T_1/2, 3T_1/4, T_1$  (ver Figura (VI.2)). Em cada instante a onda resultante será a soma das ondas (1) + (2) + ...



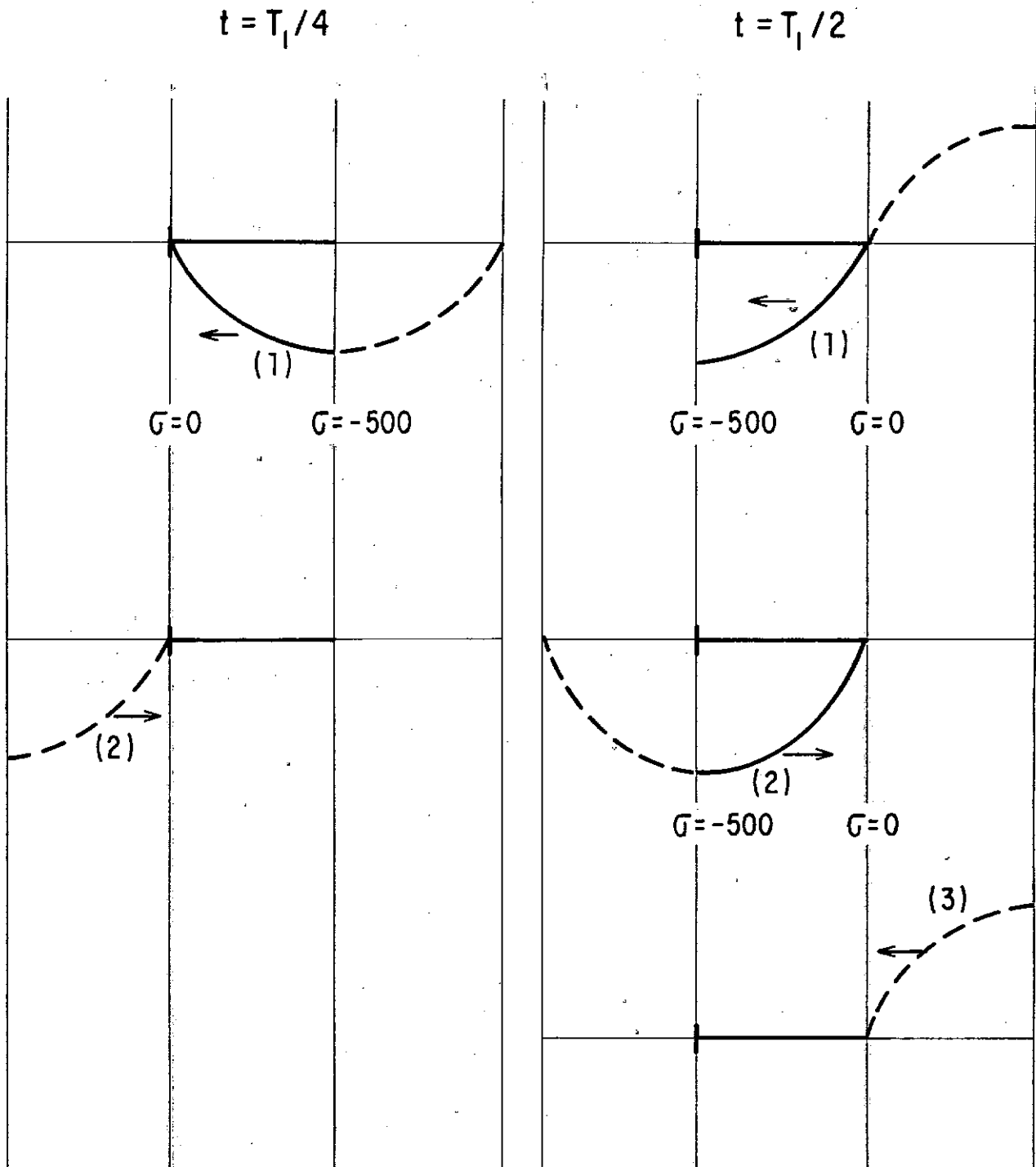


FIG. (VI - 2a)

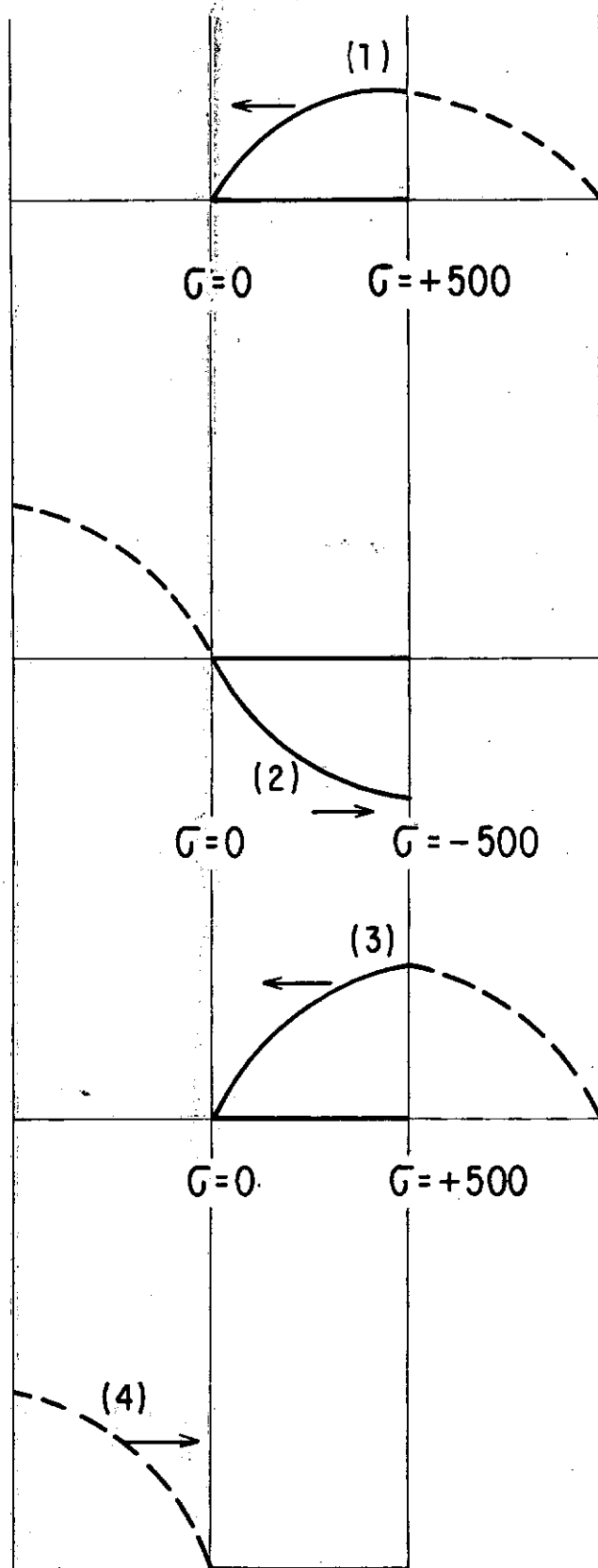
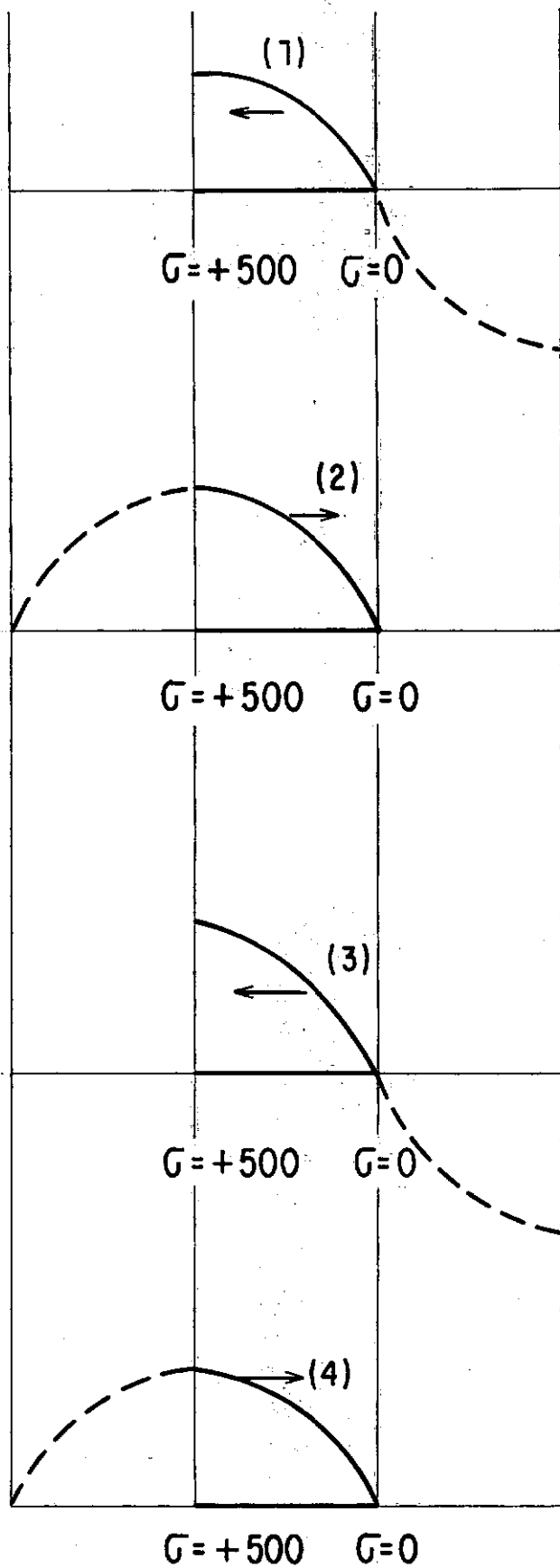
$t = 3T_1/4$  $t = T_1$ 

FIG (VI - 2b)

Para  $x = L$  (ou seja, ...no nó 1) a solução exata do problema em termos de tensões é dada pelas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 0 & 0 \leq t \leq T_1/4 \\ \sigma = -1000 \operatorname{sen} \frac{2\pi(t-T_1/4)}{T_1} & T_1/4 \leq t \leq 3T_1/4 \\ \sigma = -2000 \operatorname{sen} \frac{2\pi(t-T_1/4)}{T_1} & 3T_1/4 \leq t \leq T_1 \end{array} \right. \quad (\text{VI.8})$$

( $\sigma$  em  $\text{N/cm}^2$ )

Na Figura (VI.3) foram traçados dois gráficos da tensão normal ao longo da haste no instante  $t = T_1$ , com  $\Delta t = T_1/4$  no 1º gráfico e  $\Delta t = T_1/8$  no 2º; onde pode-se comparar as soluções aproximadas dadas pelos diversos algoritmos com a solução exata. Observa-se a precisão superior da regra trapezoidal em relação ao algoritmo de Wilson- $\theta$  ( $\theta = 1,4$ ) e do algoritmo hermitiano cúbico ( $\zeta = 1/2$ ) em relação aos algoritmos lineares.

Procedendo segundo o critério descrito no item anterior escolheu-se os seguintes intervalos de integração:

$$\Delta t = T_1/4, T_1/8, \dots, T_1/256$$

Para cada  $\Delta t$  foi processado o programa SAND-AID de cada algoritmo, calculando-se o esforço normal do elemento 1 ao longo do tempo e medindo-se o tempo de processamento e o in-

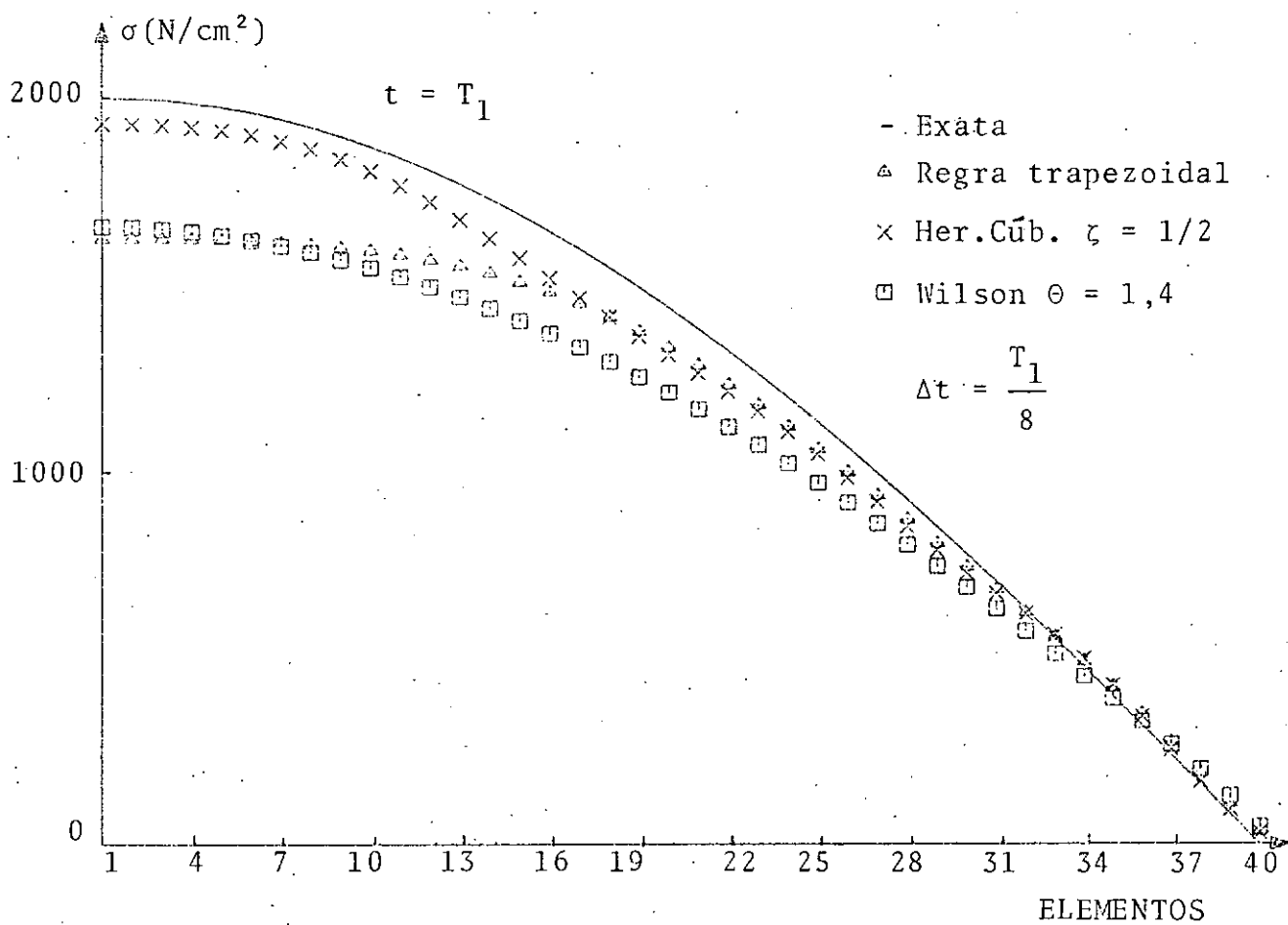
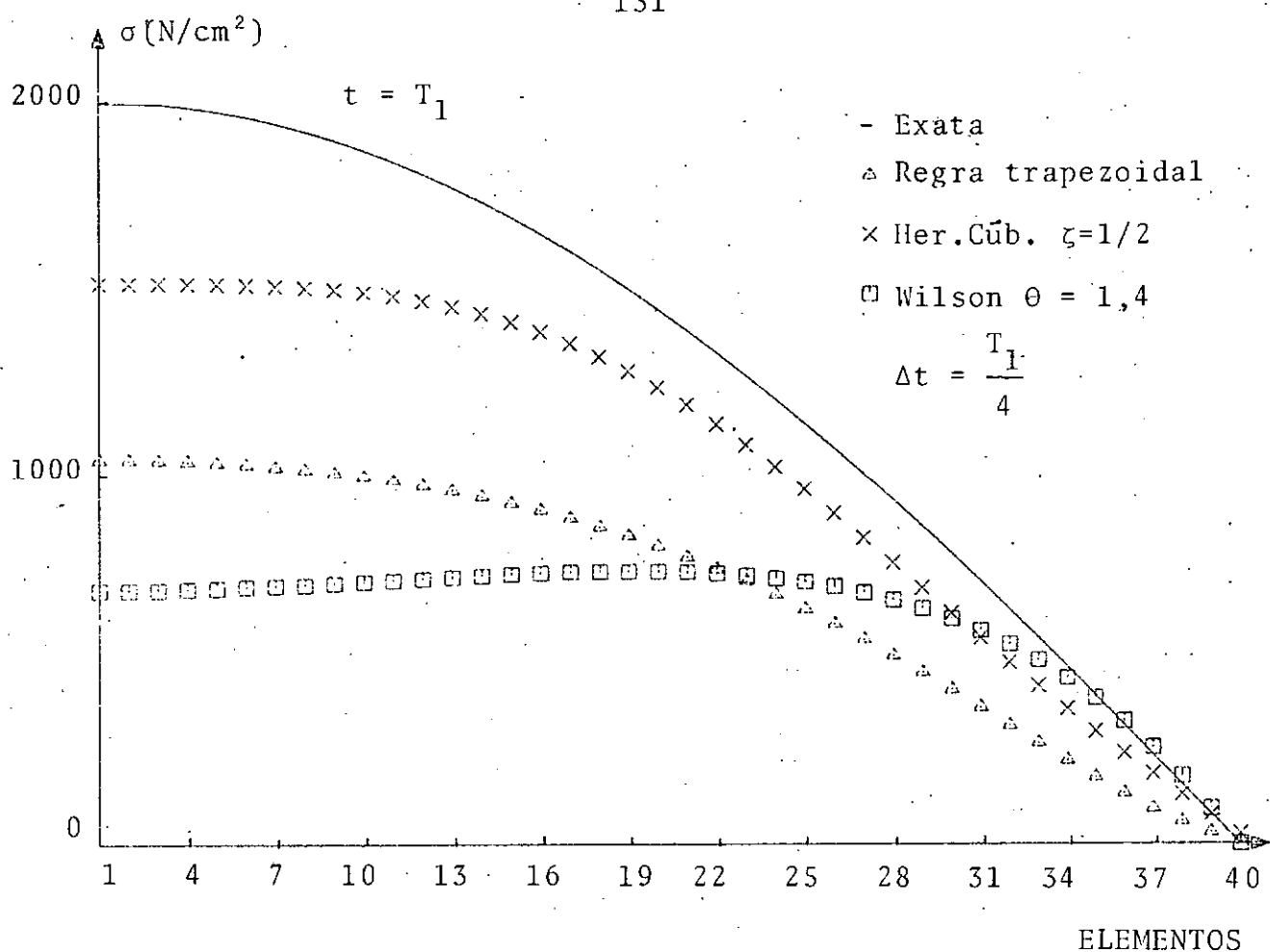


Fig. (VI.3)

tegral de memória.

Comparando os resultados obtidos com a solução exata dada pelas equações (VI.8), calculou-se o erro relativo ao longo do tempo e a seguir, pela fórmula (VI.4), o erro relativo médio. Como o esforço normal no elemento 1 é nulo até o instante  $T_1/4$ , no cálculo do erro relativo médio foi considerado o intervalo de  $t_A = T_1/4$  a  $t_B = T_1$ .

Na Tabela (VI.1) encontram-se a solução exata e as aproximadas dadas pelos diversos algoritmos para  $\Delta t = T_1/8$ , bem como o erro relativo ao longo do tempo.

Neste exemplo o algoritmo hermitiano cúbico foi implementado utilizando interpolação linear e cúbica das forças externas. Como a carga é senoidal, usando interpolação cúbica das forças externas a precisão será melhor do que quando usar interpolação linear, inclusive pode ser usado o intervalo de integração  $\Delta t = T_1/2$ , o que não pode ser feito nos demais algoritmos.

Na Tabela (VI.2) encontram-se os tempos de processamento (em segundos) divididos em quatro parcelas (ver Eq. (VI.2)), para os quatro algoritmos.

Observa-se que o algoritmo de Wilson- $\theta$  e o Newmark gastam o mesmo tempo de processamento. A diferença no tempo de processamento entre estes dois algoritmos é o hermitiano linear está na parcela  $T_1$  (correspondente ao esquema B.1) que represen-

TEMPO t	TENSÃO NORMAL NO ELEMENTO 1 (N/cm <sup>2</sup> )					ERRO RELATIVO (%)			
	SOL. EX.	R.T.	W	HCL	HCC	RT	W	HCL	HCC
T <sub>1</sub> /8	0,00	- 12,95	- 10,89	2,64	2,75	-	-	-	-
T <sub>1</sub> /4	0,00	- 121,86	- 107,81	- 68,44	- 75,30	-	-	-	-
3T <sub>1</sub> /8	- 707,11	- 469,20	- 420,31	- 665,32	- 699,86	33,65	40,56	5,91	1,03
T <sub>1</sub> /2	-1000,00	- 913,87	- 843,91	- 939,38	- 989,84	8,61	15,61	6,06	1,02
5T <sub>1</sub> /8	- 707,11	- 823,67	- 867,10	- 707,63	- 740,71	16,48	22,63	0,07	4,75
3T <sub>1</sub> /4	0,00	79,09	- 143,17	115,37	120,50	-	-	-	-
7T <sub>1</sub> /8	1414,21	1096,81	940,76	1291,07	1359,10	22,44	33,48	8,71	3,90
T <sub>1</sub>	2000,00	1627,96	1660,06	1931,54	2034,87	18,60	17,00	3,42	1,74

TABELA (VI.1)

ta o tempo necessário à montagem do vetor de acelerações inicial. Observa-se também que o algoritmo hermitiano cúbico com interpolação cúbica das forças externas gasta um pouco mais de tempo de processamento do que o com interpolação linear devido ao fato de utilizar mais um vetor de cargas ( $R_{t+\zeta\Delta t}$ ) e mais duas matrizes auxiliares ( $D_{13}$  e  $D_{23}$ ).

	HL	N	W	HCL	HCC
T0	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20
T1	0,00	0,90	0,90	0,70	0,70
T2	0,05	0,05	0,05	4,40	4,50
T3	0,30	0,30	0,30	1,06	1,10

TABELA (VI.2)

Na Tabela (VI.3) encontram-se os erros relativos médios, tempos de processamento, integrais de memória e custos totais de todos os algoritmos para cada intervalo de integração.

A partir desta Tabela foram traçados dois gráficos: erro médio x intervalo de integração (EM x  $\Delta t$ ) (ver Figura (VI.4)). e custo total x erro médio (CT x EM) (ver Figura (VI.5)).

Do primeiro gráfico observa-se que o algoritmo hermitiano cúbico possibilita o uso de um  $\Delta t$  bem maior do que os algoritmos lineares para obter a mesma precisão (por isto é chamado algoritmo large-step).

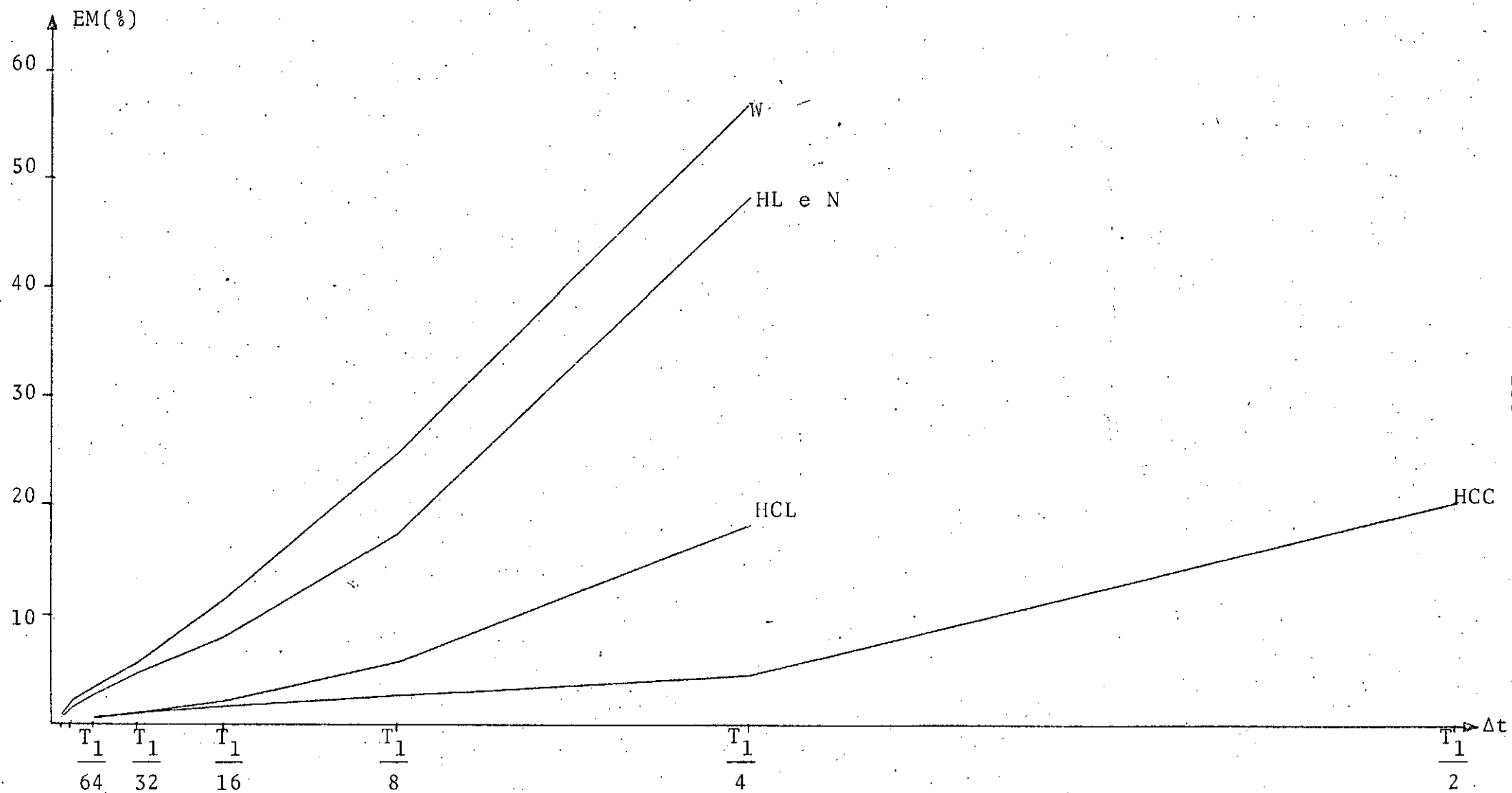


Fig. (VI.4)



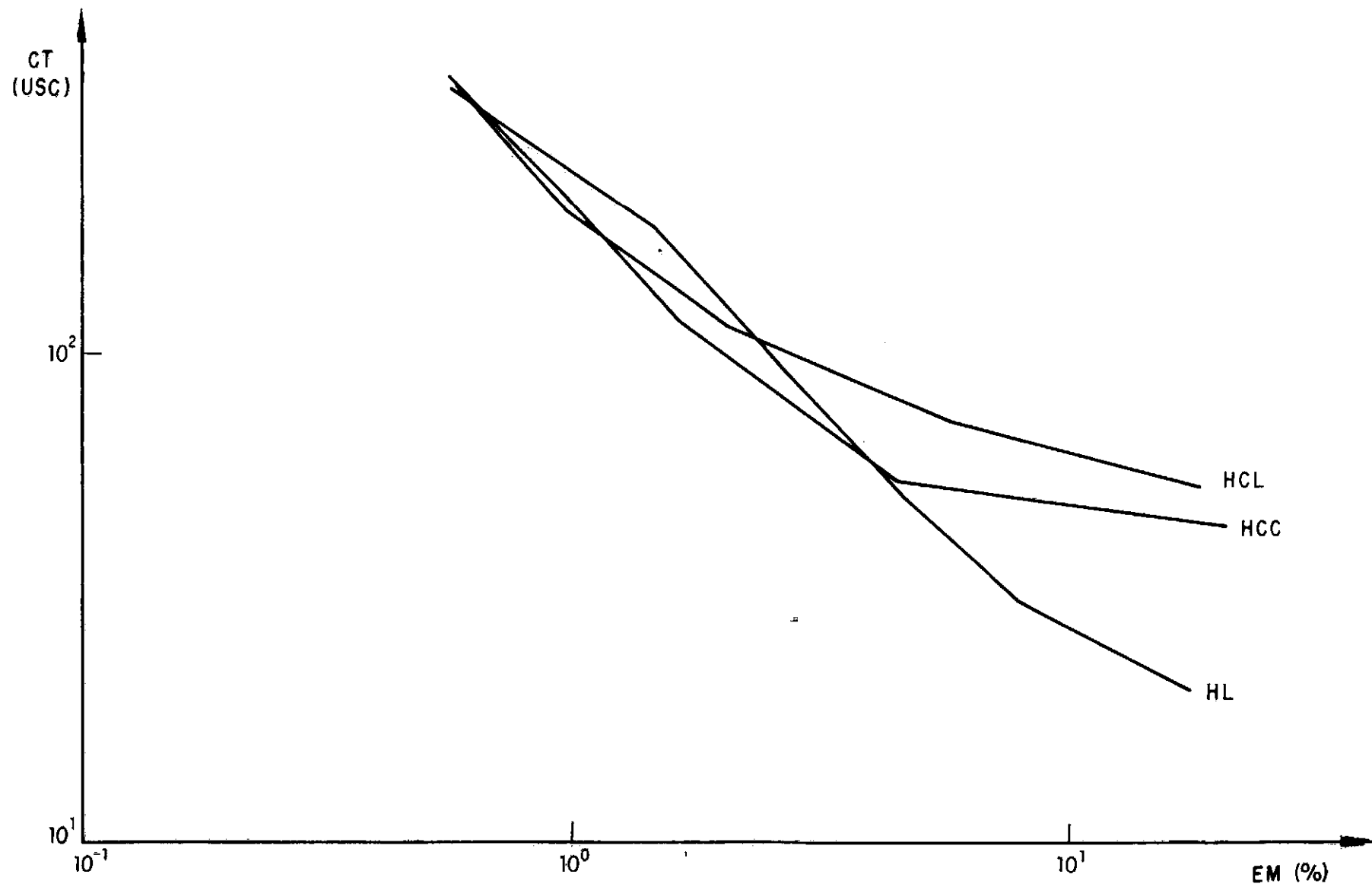


FIG. (VI. 5)

Observando o segundo gráfico obtêm-se os algoritmos mais eficientes (menor custo total) para as seguintes faixas de erro médio.

$$EM < 0,6\% \rightarrow HL$$

$$0,6\% < EM < 1,2\% \rightarrow HCL$$

$$1,2\% < EM < 4,0\% \rightarrow HCC$$

$$EM > 4,0\% \rightarrow HL$$

Para este exemplo o algoritmo de Wilson- $\theta$  ( $\theta = 1,4$ ) é menos preciso e gasta mais tempo de processamento que o hermitiano linear ( $\zeta = 1/2$ ) logo não é necessário que ele conste deste gráfico. O algoritmo de Newmark ( $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ ) é praticamente igual ao hermitiano linear ( $\zeta = 1/2$ ), tem a mesma precisão e gasta apenas um pouco mais de tempo de processamento e portanto ele também não consta deste gráfico.

De acordo com a tolerância admissível na resposta do problema pode-se determinar qual o algoritmo mais eficiente. Geralmente, em problemas de engenharia, a tolerância é de 2% a 5% portanto, para este exemplo de 41 graus de liberdade, o mais eficiente é o algoritmo hermitiano cúbico com interpolação cúbica das forças externas.

	ALG.	$T_1/2$	$T_1/4$	$T_1/8$	$T_1/16$	$T_1/32$	$T_1/64$	$T_1/128$	$T_1/256$
EM (%)	HL	-	48,40	17,46	7,99	4,66	2,66	1,52	0,57
	N	-	48,40	17,46	7,99	4,66	2,66	1,52	0,57
	W	-	57,10	24,93	11,47	5,65	3,39	2,19	0,96
	HCL	-	18,27	5,71	2,10	1,00	0,59	-	-
	HCC	20,47	4,54	2,66	1,66	1,02	0,57	-	-
TP (s)	HL	-	3,45	4,65	7,05	11,85	21,45	40,65	79,05
	N	-	4,35	5,55	7,95	12,75	22,35	41,55	79,95
	W	-	4,35	5,55	7,95	12,75	22,35	41,55	79,95
	HCL	-	11,54	15,78	24,26	41,22	75,14	-	-
	HCC	9,60	11,80	16,20	25,00	42,60	77,80	-	-
IM	HL	-	45	60	92	154	279	528	1028
	N	-	85	108	155	249	436	810	1559
	W	-	85	108	155	249	436	810	1559
	HCL	-	202	276	424	721	1315	-	-
	HCC	171	210	288	445	758	1385	-	-
CT (USC)	HL	-	15,1	20,3	30,9	51,9	94,0	178,0	346,3
	N	-	20,8	26,5	37,9	60,8	106,6	198,2	381,4
	W	-	20,8	26,5	37,9	60,8	106,6	198,2	381,4
	HCL	-	53,7	73,4	112,8	191,7	349,4	-	-
	HCC	44,8	55,1	75,6	116,7	198,8	363,2	-	-

TABELA (VI.3)

No próximo item será estudado um problema com um número maior de graus de liberdade.

### VI.3 - EXEMPLO 2 - SIMULAÇÃO DE UMA RUPTURA NUMA TUBULAÇÃO SECUNDÁRIA DO PRÉDIO DE UM REATOR

Como segundo exemplo tomou-se um acidente causado pela ruptura de uma tubulação do circuito secundário do Prédio de um Reator (tipo PWR) representada de uma forma simplificada por um pórtico espacial discretizado em 16 elementos (ver Figura (VI.6)). Como a estrutura tem 17 nós, cada nó com 6 graus de liberdade (NDESNO = 6), trata-se de um problema de 102 graus de liberdade e a largura da semi-banda das matrizes da estrutura é:  $\ell_f = \text{NDESNO} \times (\text{IDIF} + 1) = 6 \times 2 = 12$ . A seção do tubo está mostrada na Figura (VI.6) e as constantes do material empregado foram:

$$E = 20580 \times 10^4 \text{ kN/m}^2 \quad \text{e} \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

Considerou-se o tubo cheio d'água, utilizando uma massa específica equivalente calculada da seguinte forma:

$$\rho_{eq} = \frac{\rho \times A + \rho_{H_2O} \times A_i}{A}$$

$$A_i = \frac{\pi \times (0,4)^2}{4} = 12,566 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\therefore \rho_{eq} = 11565 \text{ kg/m}^3$$

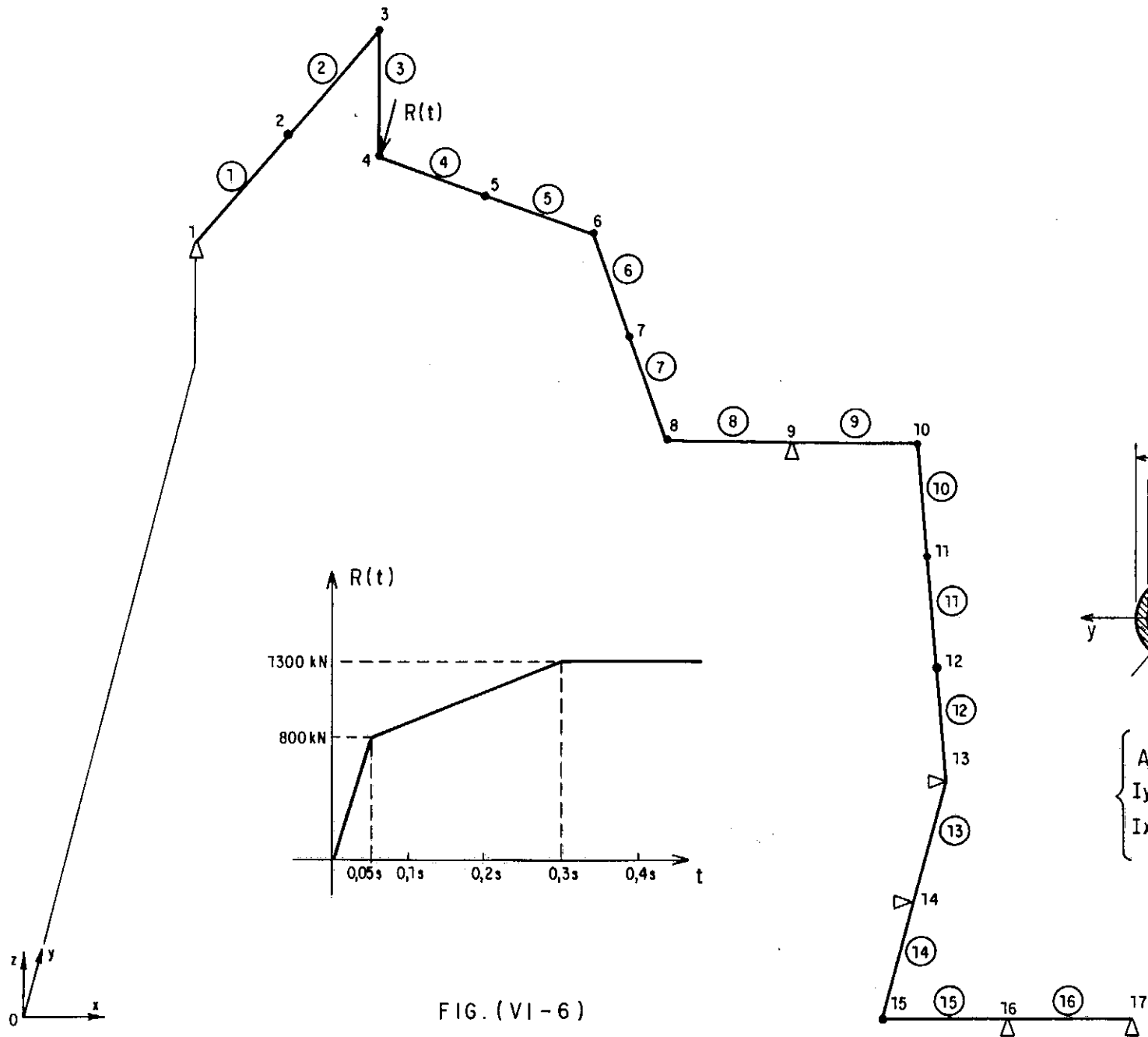


FIG. (VI-6)

Os apoios representados na estrutura indicam que há impedimento de translação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Para simular uma ruptura longitudinal no nó 4, aplicou-se neste nó, na direção  $y$ , uma carga de impacto  $R(t)$  mostrada na Figura (VI.6).

Considerou-se neste exemplo a matriz de massa consistente e a matriz de amortecimento nula. Para comparação dos algoritmos será calculado o deslocamento do nó 4 na direção  $z$  ( $U_z^4$ ).

Os cinco primeiros períodos naturais da estrutura são:

$$T_1 = 0,60 \text{ s}$$

$$T_2 = 0,14 \text{ s}$$

$$T_3 = 0,10 \text{ s}$$

$$T_4 = 0,08 \text{ s}$$

$$T_5 = 0,05 \text{ s}$$

Para este carregamento  $R(t)$  os modos de 1 a 3 serão os mais excitados e os que mais participarão da resposta. Como foi visto no item IV.1, escolhendo  $\Delta t = T_3/10$  ou  $T_1/60$  obtém-se uma boa aproximação da resposta.

Foi considerada "exata" a solução aproximada dada pela regra trapezoidal para  $\Delta t = T_1/256$ .

O deslocamento estático do nó 4 na direção  $z$ , obtido aplicando uma carga de 1300 kN no mesmo nó na direção  $y$  é:

$$U_{z(est)}^4 = - 1,023 \text{ m}$$

O deslocamento máximo dinâmico do nó 4 na direção  $z$  para o carregamento  $R(t)$  é:

$$U_{z(m\acute{a}x)}^4 = - 1,658 \text{ m}$$

Logo o fator de amplificação dinâmica máximo neste problema é:

$$DLF_{(m\acute{a}x)} = 1,62$$

Na Tabela (VI.4) encontram-se a solução "exata" (R. T. com  $\Delta t = T_1/256$ ) e as aproximadas dadas pelos diversos algoritmos para  $\Delta t = T_1/16$  mostradas no gráfico  $U_z^4 \times t$  (ver Figura (VI.7)) e também o erro relativo ao longo do tempo.

Observa-se novamente a precisão superior da regra trapezoidal em relação ao algoritmo de Wilson- $\theta$  ( $\theta = 1,4$ ) e do algoritmo hermitiano cúbico ( $\zeta = 1/2$ ) em relação aos algoritmos lineares.

TEMPO t	$U_z^4$ (m)				ERRO RELATIVO (%)		
	SOL. EX.	RT	W	HC	RT	W	HC
$T_1/16$	0,0141	0,0211	0,01395	0,0141	49,94	1,00	0,37
$T_1/8$	0,1115	0,1123	0,1017	0,1067	0,83	8,81	4,34
$3T_1/16$	0,3200	0,3020	0,2890	0,3066	5,61	9,68	4,19
$T_1/4$	0,5930	0,5703	0,5552	0,5764	3,82	6,37	2,80
$5T_1/16$	0,9149	0,8737	0,8588	0,8941	4,50	6,13	2,27
$3T_1/8$	1,2259	1,1746	1,1583	1,2072	4,19	5,51	1,53
$7T_1/16$	1,4585	1,4321	1,4155	1,4476	1,81	2,95	0,75
$T_1/2$	1,6148	1,5971	1,5909	1,6075	1,09	1,48	0,45
$9T_1/16$	1,6544	1,6480	1,6593	1,6581	0,38	0,30	0,22
$5T_1/8$	1,5606	1,5920	1,6144	1,5735	2,01	3,45	0,83
$11T_1/16$	1,3789	1,4352	1,4669	1,3941	4,09	6,38	1,11
$3T_1/4$	1,1260	1,1930	1,2409	1,1470	5,95	10,21	1,86
$13T_1/16$	0,8491	0,9165	0,9754	0,8669	7,94	14,87	2,10
$7T_1/8$	0,6083	0,6696	0,7193	0,6221	10,08	18,24	2,26
$15T_1/16$	0,4453	0,4897	0,5199	0,4533	9,97	16,74	1,78
$T_1$	0,3985	0,3972	0,4116	0,3931	0,32	3,27	1,37

TABELA (VI.4)



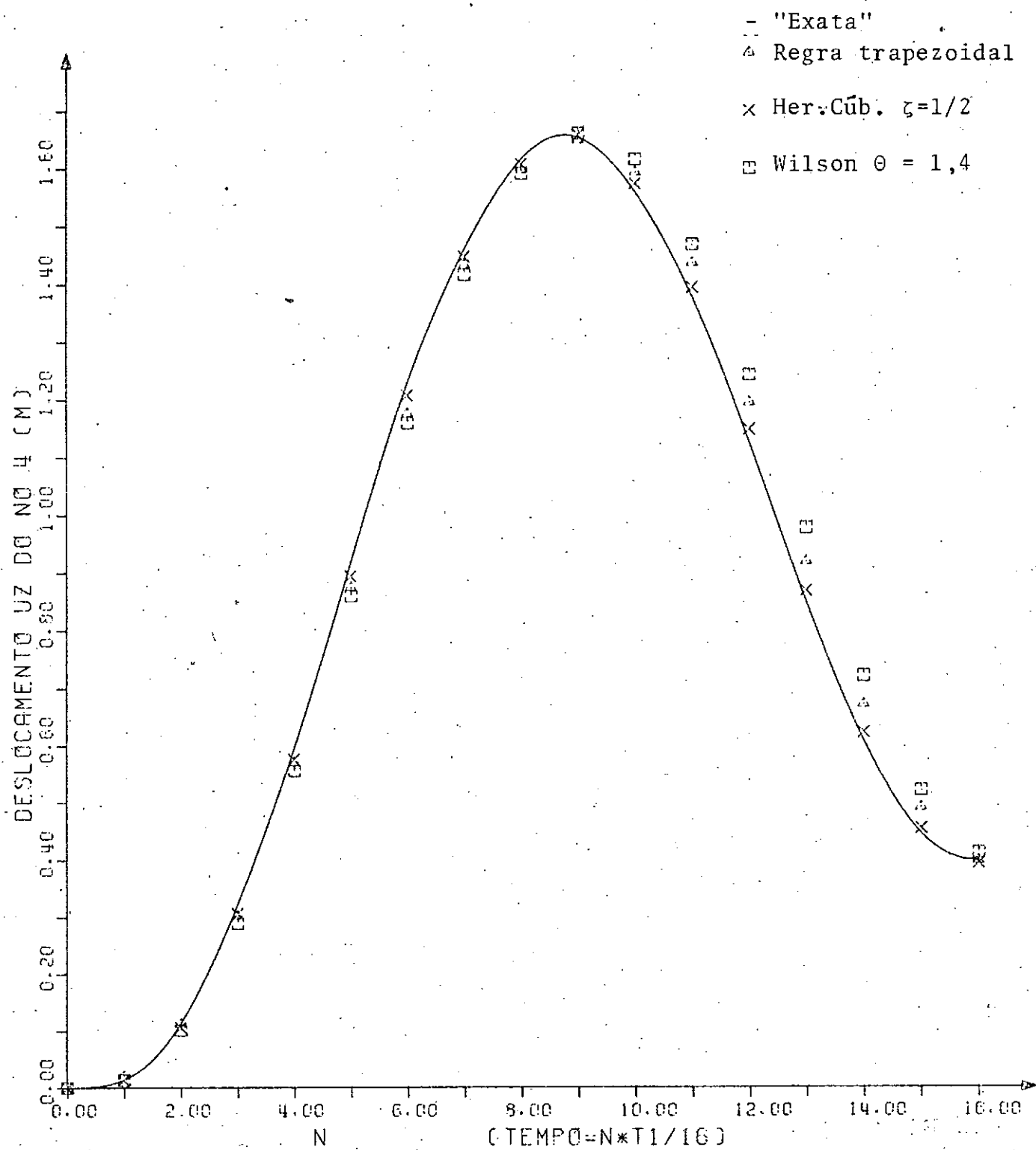


Fig. (VI.7)

Neste exemplo não é conveniente utilizar o algoritmo hermitiano cúbico com interpolação cúbica das forças externas pois o carregamento  $R(t)$  varia linearmente.

Procedendo segundo o critério descrito no item VI.1, escolheu-se os seguintes intervalos de integração:

$$\Delta t = T_1/4, T_1/8, \dots, T_1/64$$

No algoritmo hermitiano cúbico usou-se  $\Delta t = T_1/2$  em vez de  $T_1/64$ .

Para cada  $\Delta t$  processou-se o programa SAND-AID para cada algoritmo, calculando-se o deslocamento  $U_z$  do nó 4 ao longo do tempo até o instante  $t = T_1$  e medindo-se o tempo de processamento e o integral de memória.

Comparando os resultados obtidos com a solução "exata", calculou-se o erro relativo ao longo do tempo e, pela fórmula (VI.4), o erro relativo médio.

Na Tabela (VI.5) encontram-se os tempos de processamento (em segundos) divididos em quatro parcelas (ver Eq. (VI.2)) dos diversos algoritmos.

	HL	N	W	HC
T0	12,9	12,9	12,9	12,9
T1	0	33,3	33,3	31,7
T2	1,8	1,3	1,3	89,9
T3	0,95	1,2	1,2	8,00

TABELA (VI.5)

Observa-se neste exemplo uma diferença maior no tempo de processamento (32,8 s) entre os algoritmos de Wilson- $\theta$  e Newmark e o algoritmo hermitiano linear pois o tempo de fatoração da matriz de massa é bem maior do que no primeiro exemplo (T1 é proporcional a  $n \times \ell f = 102 \times 12$ ). Se for usada a matriz de massa discreta consegue-se diminuir esta diferença e T1 passa a ser 3,8 s, a precisão porém diminui um pouco. Deve-se ressaltar no entanto que o algoritmo hermitiano linear não calcula o vetor de acelerações a cada etapa. Nos problemas em que se deseja conhecer o vetor de acelerações deve-se substituir os vetores de deslocamentos, velocidades e de cargas na equação de equilíbrio e fatorar a matriz de massa, logo esta diferença no tempo de processamento desaparece.

Da mesma forma, utilizando matriz de massa discreta, T1 do algoritmo hermitiano cúbico passa a ser 2,0 s.

Neste exemplo é muito maior a diferença nos tempos de processamento T2 e T3 do algoritmo cúbico em relação aos li-

neares, pois no cúbico T2 e T3 são proporcionais a  $n^2$  enquanto que nos lineares são proporcionais a  $n \times \ell f$ .

Na Tabela VI.6 encontram-se os erros relativos médios, tempos de processamento, integrais de memória e custos totais de todos os algoritmos para cada intervalo de integração.

Observa-se que os erros médios deste exemplo são menores do que os do primeiro exemplo para os mesmos intervalos de integração  $\Delta t$ , pois neste exemplo o erro relativo foi calculado em termos de deslocamentos em vez de esforços.

Apesar do algoritmo hermitiano cúbico, da mesma forma que no primeiro exemplo, possibilitar o uso de um  $\Delta t$  maior do que nos lineares para obter a mesma precisão, ele será sempre menos eficiente pois a parcela T2 (89,9 s) do algoritmo cúbico isolada já é maior do que TP (75,5 s) do algoritmo hermitiano linear para  $\Delta t = T_1/64$ .

Neste exemplo a diferença no integral de memória entre os algoritmos de Wilson e Newmark e o algoritmo hermitiano linear é mais significativa, isto é devido ao fato do hermitiano linear não utilizar o vetor de acelerações a cada etapa que neste exemplo ocupa mais memória do que no exemplo anterior.

	ALG.	$T_1/2$	$T_1/4$	$T_1/8$	$T_1/16$	$T_1/32$	$T_1/64$
EM (%)	HL	-	31,09	14,23	5,24	1,36	0,35
	N	-	31,09	14,23	5,24	1,36	0,35
	W	-	39,79	22,29	7,49	2,06	0,54
	HC	36,01	17,23	7,35	1,90	0,48	-
TP (s)	HL	-	18,5	22,3	29,9	45,1	75,5
	N	-	52,3	57,1	66,7	85,9	124,3
	W	-	52,3	57,1	66,7	85,9	124,3
	HC	150,5	166,5	198,5	262,5	390,5	-
IM	HL	-	418	481	704	1128	1978
	N	-	1964	2155	2628	3474	5292
	W	-	1964	2155	2628	3474	5292
	HC	10775	12204	15701	22181	35184	-
CT (USC)	HL	-	90,0	107,3	147,1	225,6	382,6
	N	-	298,3	326,3	387,3	503,8	743,9
	W	-	298,3	326,3	387,3	503,8	743,9
	HC	1145,2	1282,8	1593,9	2187,2	3376,1	-

TABELA (VI.6)

Na Figura (VI.8) encontra-se o gráfico erro médio x intervalo de integração ( $EM \times \Delta t$ ). Para este exemplo de 102 graus de liberdade não foi necessário traçar o gráfico custo total x erro médio ( $CT \times EM$ ), basta se observar a Tabela (VI.6) para se constatar que o algoritmo hermitiano linear é muito mais eficiente do que os outros.

Nos problemas com mais de 102 graus de liberdade será ainda maior a economia ao se utilizar o algoritmo hermitiano linear ( $\zeta = 1/2$ ).

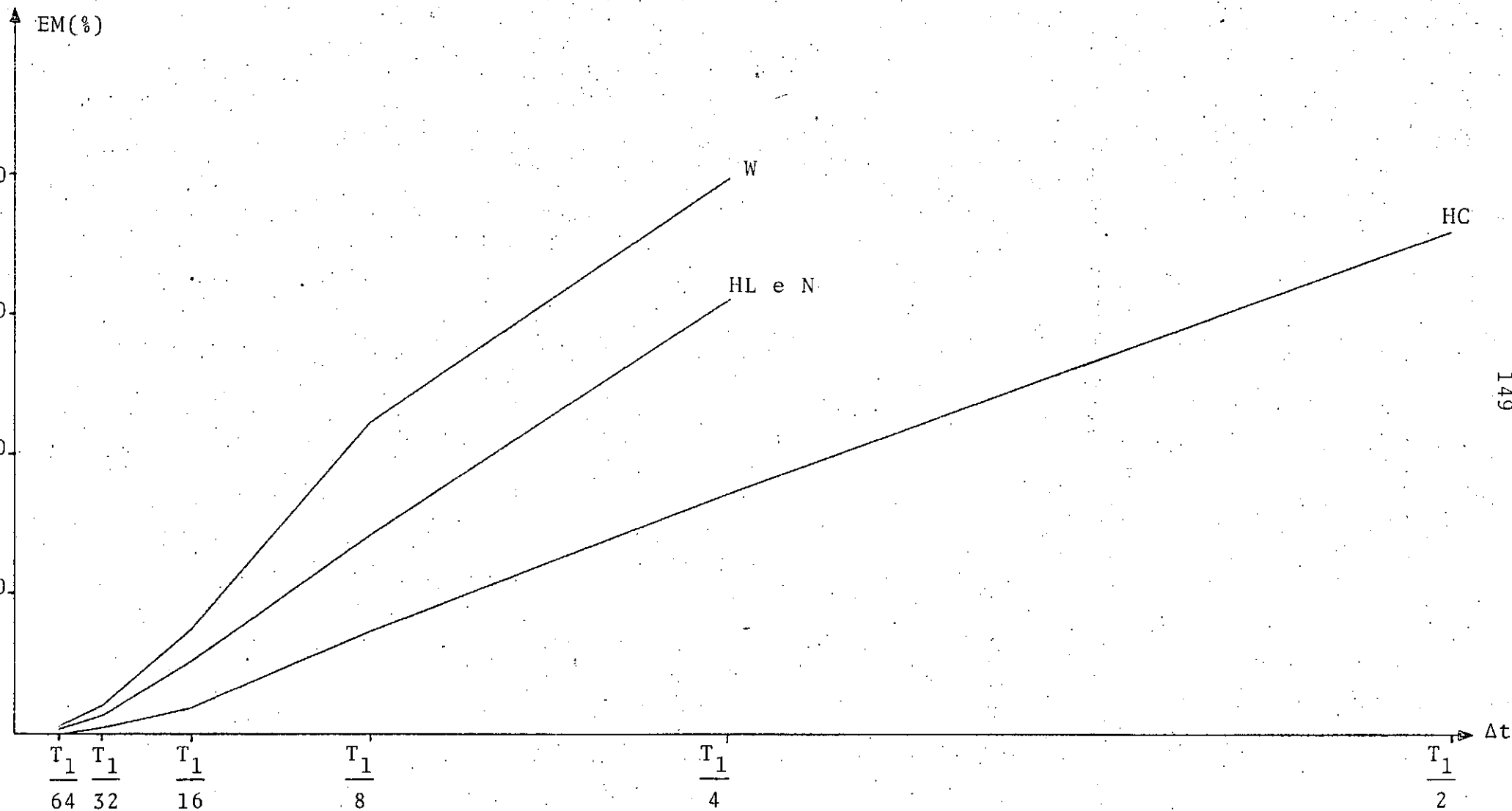


Fig. (VI.8)

#### VI.4 - CONCLUSÕES

A partir dos exemplos mostrados neste capítulo, admitindo que não haja amortecimento físico nos problemas e que a tolerância nos erros de precisão das resposta é de 2% a 5%, pode-se concluir que:

- Entre os algoritmos lineares (Wilson- $\theta$  com  $\theta = 1,4$  e o da regra trapezoidal) mostrou-se mais eficiente o da regra trapezoidal.
- A regra trapezoidal implementada pelo algoritmo hermitiano linear ( $\zeta = 1/2$ ) é um pouco mais econômica do que pelo algoritmo de Newmark ( $\alpha = 1/4$ ,  $\delta = 1/2$ ) na sua forma convencional. Para os problemas porém em que se deseja conhecer o vetor de aceleração tanto faz utilizar um algoritmo como o outro.
- O algoritmo hermitiano cúbico ( $\zeta = 1/2$ ) mostrou-se mais eficiente do que os lineares para problemas de poucos graus de liberdade (menos de 40). Quando o carregamento do problema for melhor aproximado por um polinômio cúbico do que um linear, deve-se utilizar neste problema o algoritmo cúbico com interpolação cúbica das forças externas, caso contrário, deve-se utilizar interpolação linear.
- Para problemas de muitos graus de liberdade (mais de 100), a regra trapezoidal mostrou-se muito mais eficiente do que o algoritmo hermitiano cúbico ( $\zeta = 1/2$ ).

- Como para 40 graus de liberdade já é pequena a diferença, em termos de economia, entre o algoritmo hermitiano cúbico e o da regra trapezoidal, para problemas intermediários (de 40 a 100 GL) recomenda-se a utilização deste último. Resumindo:

até 40 GL → convém usar o algoritmo hermitiano cúbico

mais de 40 GL → convém usar a regra trapezoidal

- Deve-se ressaltar que os sistemas estruturais estudados aqui foram supostos lineares e as conclusões ditas acima não devem ser extrapoladas para estruturas não lineares. Na referência (21) encontram-se exemplos de análise dinâmica não linear em que o algoritmo hermitiano cúbico mostrou-se mais eficiente do que os algoritmos lineares.



## CAPÍTULO VII

### EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM ENGENHARIA

O objetivo deste capítulo é mostrar um exemplo de aplicação da análise dinâmica estrutural em Engenharia (ver refs. (22) a (25)).

De acordo com a Comissão Regulamentar de Energia Nuclear dos Estados Unidos (U.S. NRC), as estruturas de uma Usina Nuclear devem ser devidamente protegidas dos efeitos dinâmicos causados por falhas de equipamentos situados nos prédios da usina bem como de acidentes que possam ocorrer do lado de fora dos mesmos. Entre estes últimos, além dos efeitos de terremoto e impacto de avião, deve-se incluir o efeito de uma explosão causada por material explosivo que esteja sendo transportado numa estrada próxima à usina.

Segundo esta comissão, a distância mínima entre uma estrutura e a carga transportada a partir da qual esta estrutura é considerada segura é:

$$R^* = 18 \times W^{1/3}$$

onde  $R^*$  é dado em m e  $W$ , peso da carga de TNT transportada, é dado em kgf.

Para distâncias menores que  $R^*$  deve-se então levar em conta o efeito dinâmico da explosão da carga transportada sobre a estrutura.

Como exemplo de aplicação imaginou-se um acidente causado pela explosão de uma carga de 23 tf. de TNT transportada por um caminhão que trafegava a uma distância  $R = 200$  m do prédio do reator de uma Usina Nuclear.

Para este exemplo, a distância mínima  $R^*$  é igual a:

$$R^* = 18 \times (23000)^{1/3} = 511,9 \text{ m}$$

Como  $R$  é menor do que  $R^*$  deve-se proceder a uma análise dinâmica da carga de explosão sobre a estrutura do reator.

O prédio do reator está representado na Fig. (VII.1) por um modelo estrutural simplificado (pórtico plano) composto de três ramos: o primeiro representa o interior da estrutura, o segundo, a casca de aço e o terceiro representa a casca externa de concreto da estrutura. Neste modelo as massas das lajes e barras foram agrupadas nos nós (lumped-mass) mostradas na Tabela (VII.2); as propriedades geométricas das barras estão na Tabela (VII.1).

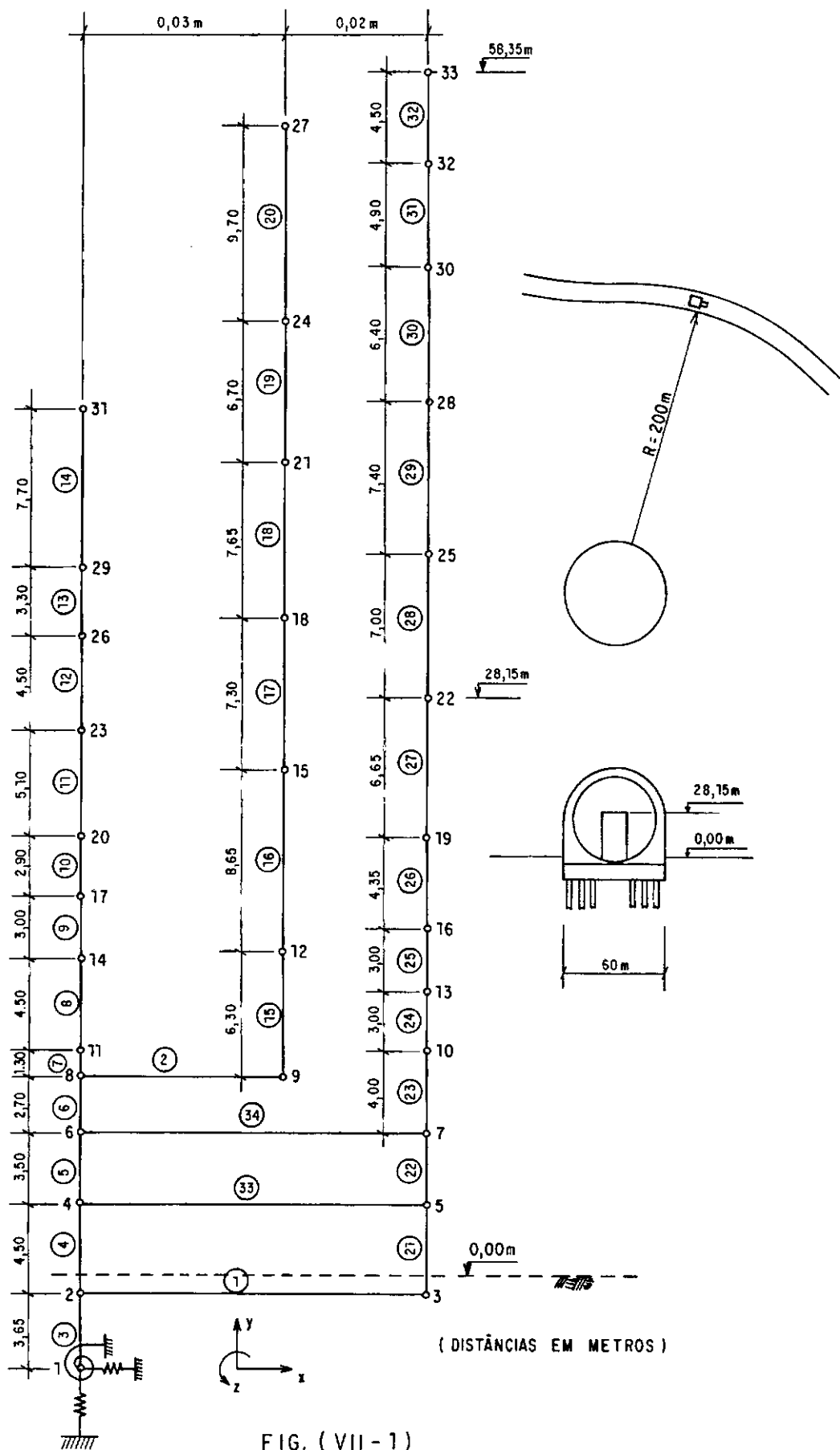


FIG. (VII - 1)

As constantes dos materiais empregados foram as seguintes:

Concreto (Bn 250):

$$E = 3,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$\bar{\rho} = 2,55 \text{ t/m}^3$$

Aço (ST 52):

$$E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 8,0 \text{ t/m}^3$$

O solo foi representado por molas ligadas ao nó 1 (que é o centro da placa de fundação), adotando-se as seguintes rigezas:

$$k_x = 2,13 \times 10^7 \text{ kN/m}$$

$$k_y = 4,40 \times 10^8 \text{ kN/m}$$

$$k_z = 1,14 \times 10^{11} \text{ kN.m/rad}$$

BARRA	$A(m^2)$	$I_z(m^4)$	BARRA	$A(m^2)$	$I_z(m^4)$
1	$1,0 \times 10^3$	$1,1 \times 10^3$	21 a 23	$1,5 \times 10^2$	$6,5 \times 10^4$
2	$9,5 \times 10^5$	$1,0 \times 10^8$	24 e 25	$1,2 \times 10^2$	$5,5 \times 10^4$
3	$2,9 \times 10^3$	$7,0 \times 10^5$	26	$2,2 \times 10^2$	$5,5 \times 10^4$
4 e 5	$5,0 \times 10^2$	$7,5 \times 10^4$	27 e 28	$2,2 \times 10^2$	$9,8 \times 10^4$
6 e 7	$5,5 \times 10^2$	$9,2 \times 10^4$	29	$1,1 \times 10^2$	$4,0 \times 10^4$
8	$4,0 \times 10^2$	$5,0 \times 10^4$	30	$1,1 \times 10^2$	$2,8 \times 10^4$
9 a 11	$3,0 \times 10^2$	$4,0 \times 10^4$	31	$1,1 \times 10^2$	$2,0 \times 10^4$
12 a 13	$2,0 \times 10^2$	$2,5 \times 10^4$	32	$1,1 \times 10^2$	$6,3 \times 10^3$
14	$8,0 \times 10^1$	$1,6 \times 10^4$	33	0,1	0,
15 a 20	$0,6 \times 10^1$	$2,0 \times 10^2$	34	0,25	0

TABELA (VII.1)

Nº	$m_x(t)$	$m_y(t)$	$m_z(tm^2)$	Nº	$m_x(t)$	$m_y(t)$	$m_z(tm^2)$
1 e 2	$2,5 \times 10^4$	$2,5 \times 10^4$	$5,0 \times 10^6$	19 e 25	$3,2 \times 10^3$	$3,2 \times 10^3$	$1,5 \times 10^6$
3	$8,0 \times 10^2$	$8,0 \times 10^2$	$4,0 \times 10^5$	22	$5,1 \times 10^3$	$5,1 \times 10^3$	$2,3 \times 10^6$
4	$1,0 \times 10^4$	$1,0 \times 10^4$	$1,7 \times 10^6$	23	$8,6 \times 10^3$	$8,6 \times 10^3$	$1,3 \times 10^6$
5 e 7	$2,1 \times 10^3$	$2,1 \times 10^3$	$9,0 \times 10^5$	24	$3,5 \times 10^2$	$3,5 \times 10^2$	$6,2 \times 10^4$
6	$8,3 \times 10^3$	$8,3 \times 10^3$	$1,6 \times 10^6$	26	$2,4 \times 10^3$	$2,4 \times 10^3$	$3,8 \times 10^5$
8	$3,5 \times 10^3$	$3,5 \times 10^3$	$7,5 \times 10^5$	27	$2,0 \times 10^3$	$2,0 \times 10^3$	$2,1 \times 10^4$
9	$5,0 \times 10^2$	$5,0 \times 10^2$	$1,6 \times 10^5$	28	$1,9 \times 10^3$	$1,9 \times 10^3$	$6,5 \times 10^5$
10,13 e 16	$1,8 \times 10^3$	$1,8 \times 10^3$	$8,0 \times 10^5$	29	$2,6 \times 10^3$	$2,6 \times 10^3$	$4,9 \times 10^5$
11 e 20	$4,5 \times 10^3$	$4,5 \times 10^3$	$8,0 \times 10^5$	30	$1,5 \times 10^3$	$1,5 \times 10^3$	$3,7 \times 10^5$
12 e 21	$3,0 \times 10^2$	$3,0 \times 10^2$	$1,2 \times 10^5$	31	$1,9 \times 10^3$	$1,9 \times 10^3$	$3,1 \times 10^5$
14	$1,9 \times 10^4$	$1,9 \times 10^4$	$3,0 \times 10^6$	32	$1,3 \times 10^3$	$1,3 \times 10^3$	$1,5 \times 10^5$
15 e 18	$3,0 \times 10^2$	$3,0 \times 10^2$	$1,2 \times 10^5$	33	$6,0 \times 10^2$	$6,0 \times 10^2$	$3,5 \times 10^4$
17	$4,0 \times 10^3$	$4,0 \times 10^3$	$4,8 \times 10^5$				

TABELA (VII.2)

Determinação da carga de explosão (curva pressão-tempo sobre uma estrutura cilíndrica):

Quando ocorre uma explosão (explosão de superfície de explosivos de TNT), uma frente de choque circular se propaga e em qualquer instante a distribuição da sobrepressão (excesso acima da pressão atmosférica) ao longo de uma linha radial tem a forma indicada na Fig. (VII.2). Esta frente de choque viaja com velocidade  $\dot{U}$  e tem um pico de pressão  $P_{so}$ . Quando ela incide sobre uma estrutura, a onda de pressão é refletida e reforçada e ao mesmo tempo o ar atrás da frente se move em alta velocidade produzindo forças de arrasto em qualquer objeto encontrado. A carga de explosão consiste então de três partes: o efeito da sobrepressão  $P_s$ , o efeito da reflexão inicial e o efeito da pressão de arrasto

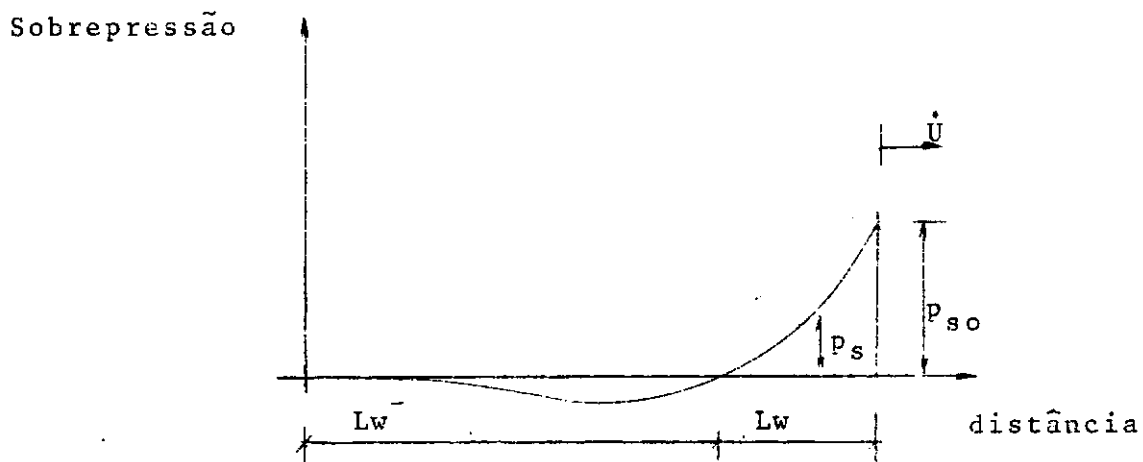


Fig. (VII.2)

Utilizando o gráfico da Fig. (VII.3) pode-se determinar o pico da onda de pressão refletida  $P_r$  (em psi) a partir da distância escalada  $Z = R/W^{1/3}$  onde

$R$  é a distância radial entre a carga de TNT transportada e a estrutura em (ft) e

$W$  é o peso da carga de TNT transportada (em lbf).

Para este exemplo em que  $R = 200 \text{ m} \approx 656 \text{ ft}$  e  $W = 23 \text{ tf} \approx 50000 \text{ lbf}$ , obtém-se  $Z = 17,8$  e entrando com  $Z$  no gráfico da Fig. (VII.3) tira-se o valor do pico da pressão refletida  $p_r = 5,6 \text{ psi} = 40 \text{ kN/m}^2$ .

Segundo as diretrizes do IfBT (ver ref. (23)), a curva pressão-tempo e a distribuição espacial das pressões para estruturas cilíndricas com diâmetros de 30 a 70 m sujeitas a explosões externas são definidas conforme mostra a Fig. (VII.4), onde:

$p_1$  é o pico da pressão refletida  $P_r$  da Fig. (VII.3), ( $p_1 < 100 \text{ kN/m}^2$ ) e

$$p_2 = ap_1, \quad \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}.$$

Como neste exemplo foi utilizado um modelo de pórtico plano para representar a estrutura do reator, calculou-se



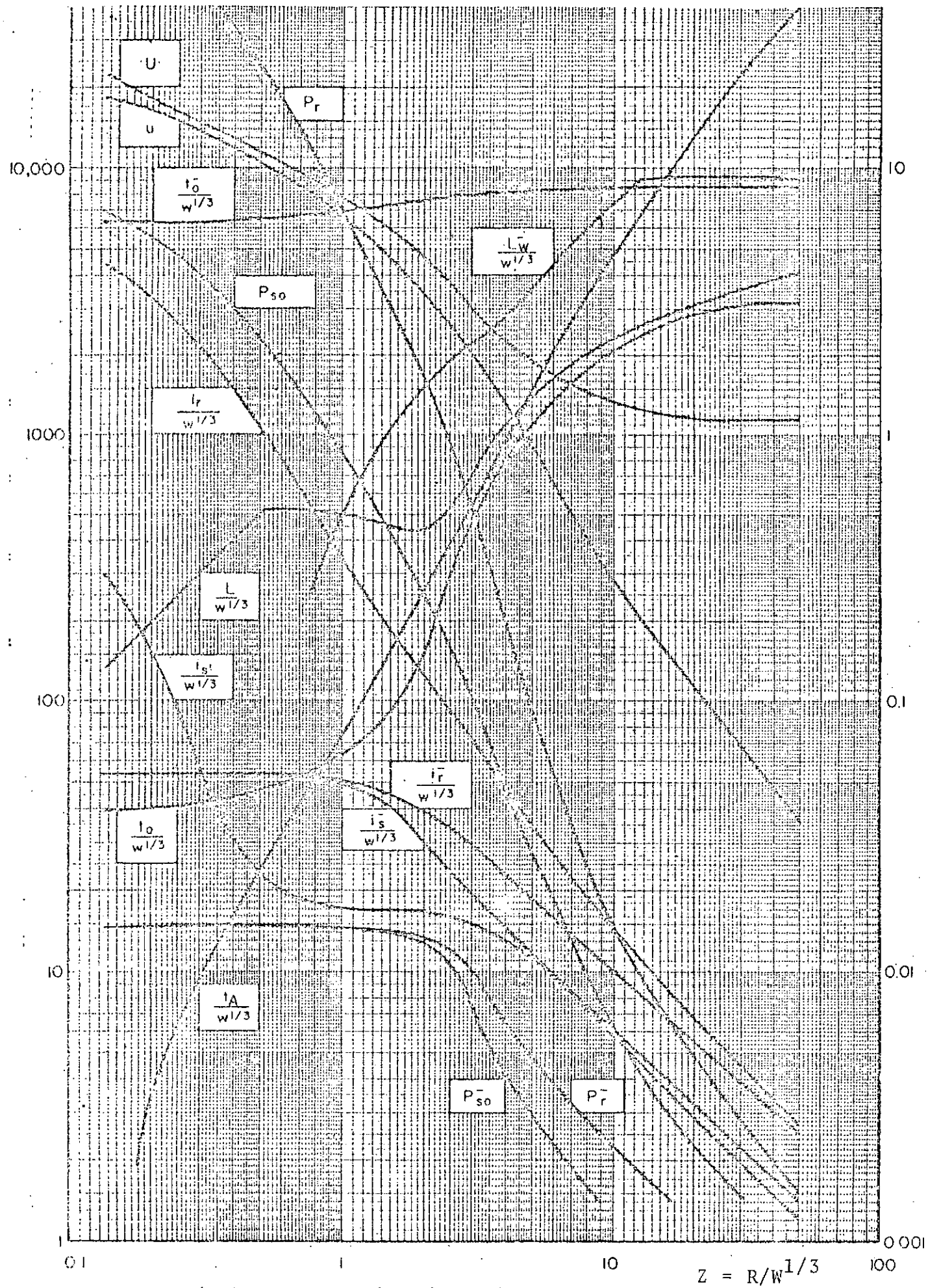


Fig. (VII.3)

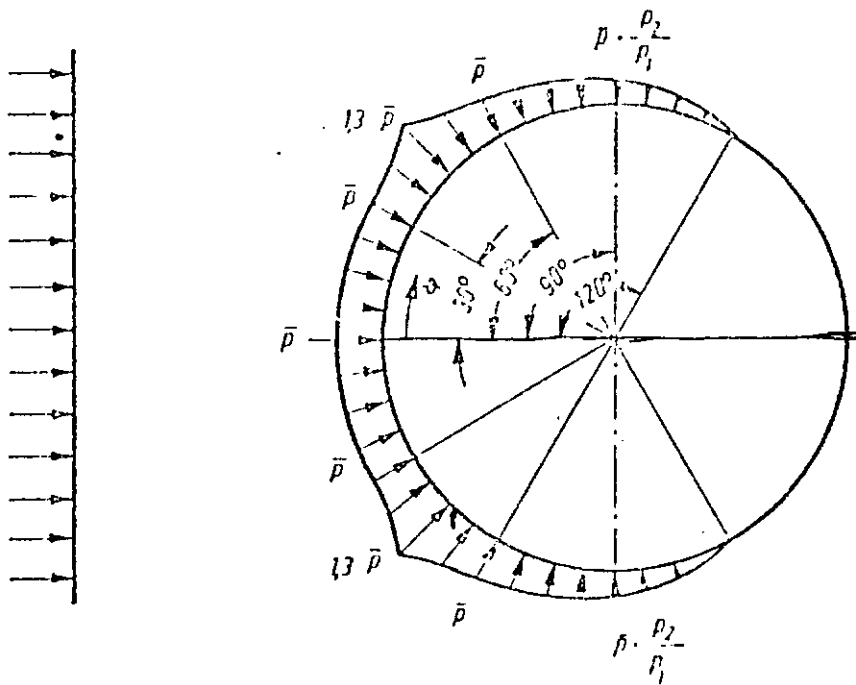
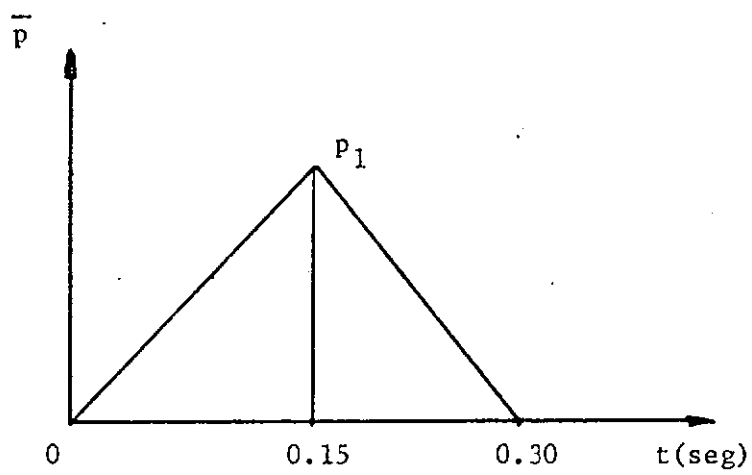


Fig. (VII.4)

(aproximadamente) a resultante da pressão  $\bar{p}$  sobre a seção transversal da superfície cilíndrica na direção  $x$ ,  $\bar{p}_x$ , distribuída uniformemente ao longo da parede externa até a elevação 28,15 m aonde começa a calota esférica do prédio do reator, diminuindo a partir daí, proporcionalmente à altura, até atingir  $\bar{p}_x = 0$  no cume da calota. O valor máximo de  $\bar{p}_x$  no tempo é  $p_{x1} = 2800$  kN/m (correspondente a  $p_1 = 40$  kN/m<sup>2</sup>).

De uma maneira aproximada determinou-se assim a carga de explosão sobre a estrutura do reator, com a distribuição espacial mostrada na Fig. (VII.5) e a curva pressão  $\times$  tempo  $\bar{p}_x \times t$ , que é a mesma que  $\bar{p} \times t$ , mostrada na Fig. (VII.4).

Efetuuou-se a análise dinâmica do efeito da explosão sobre a estrutura calculando o deslocamento na direção  $x$  dos nós 27 e 33 ao longo do tempo. Para efeito de deslocamentos pode-se concentrar nos nós o carregamento distribuído  $\bar{p}_x$ , conforme mostra a Fig. (VII.5) sem alterar o resultado.

Para esta estrutura o número de equações (graus de liberdade) e a largura de faixa são respectivamente:

$$NEQ = NDESNO \times NNOS = 3 \times 33 = 99$$

$$LF = NDESNO \times (IDIF + 1) = 3 \times (3+1) = 12$$

Os três primeiros modos da estrutura que serão os mais excitados por este carregamento, são:

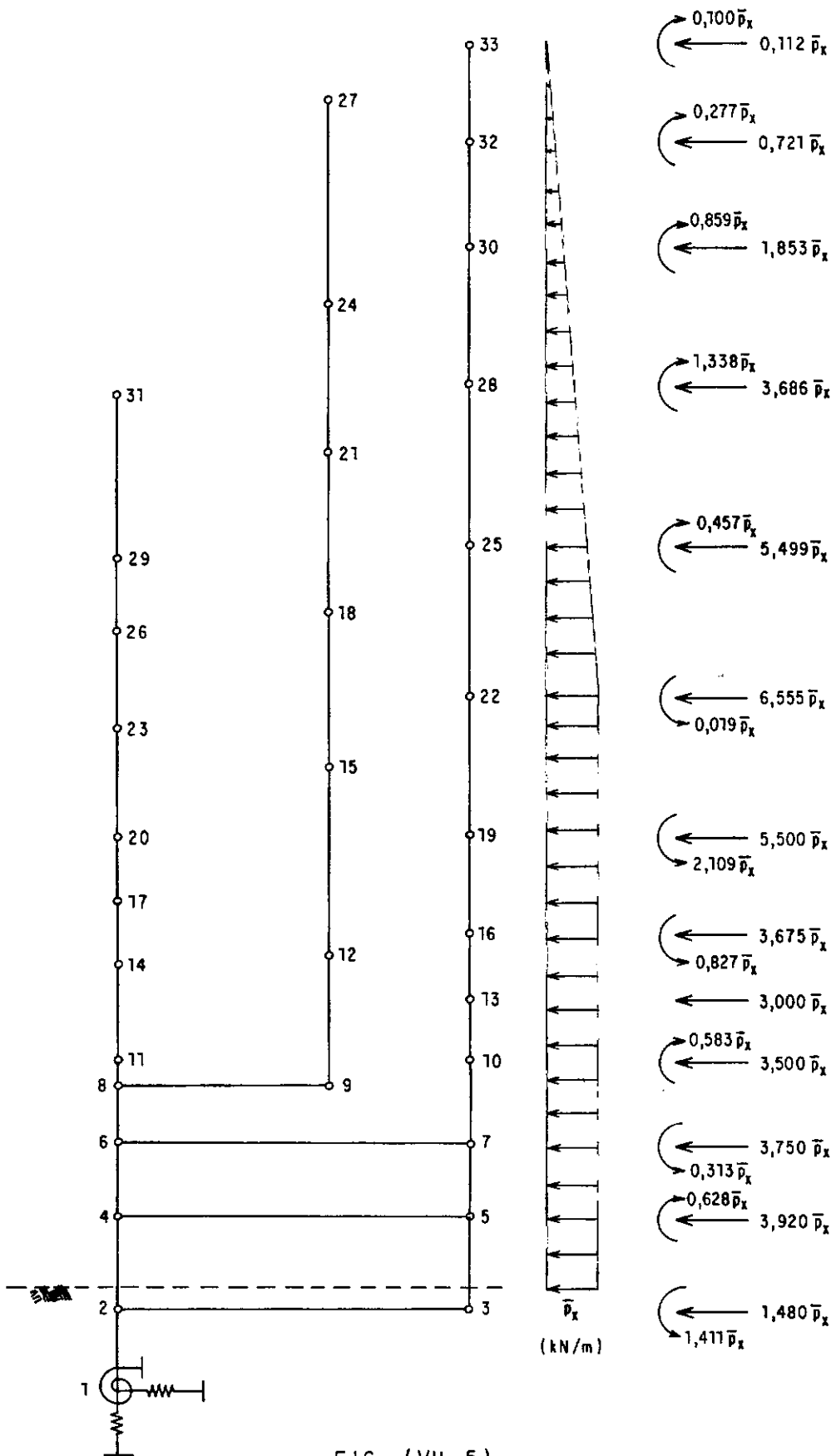


FIG. (VII-5)

$$T_1 = 0,55 \text{ s}$$

$$T_2 = 0,28 \text{ s}$$

$$T_3 = 0,16 \text{ s}$$

Para o cálculo de  $U_x$  dos nós 27 e 33 ao longo do tempo foi processado o programa SAND-AID para o algoritmo hermitiano linear com  $\zeta = 1/2$  (regra trapezoidal) escolhendo para o intervalo de integração  $\Delta t = T_1/22 = 0,025 \text{ s}$ .

Os gráficos  $U_x^{27} \times t$  e  $U_x^{33} \times t$  estão mostrados nas Figuras (VII.6) e (VII.7) respectivamente, e os deslocamentos máximos são:

$$U_x^{27}(\text{máx}) = 13,53 \text{ mm no instante } t = 0,325 \text{ s}$$

e

$$U_x^{33}(\text{máx}) = 9,80 \text{ mm no instante } t = 0,30 \text{ s}$$

Sabendo que os deslocamentos estáticos dos nós 27 e 33 são iguais a:

$$U_x^{27}(\text{est}) = 7,48 \text{ mm}$$

e

$$U_x^{33}(\text{est}) = 8,87 \text{ mm}$$

Pode-se calcular os fatores de amplificação máxima para estes dois nós:

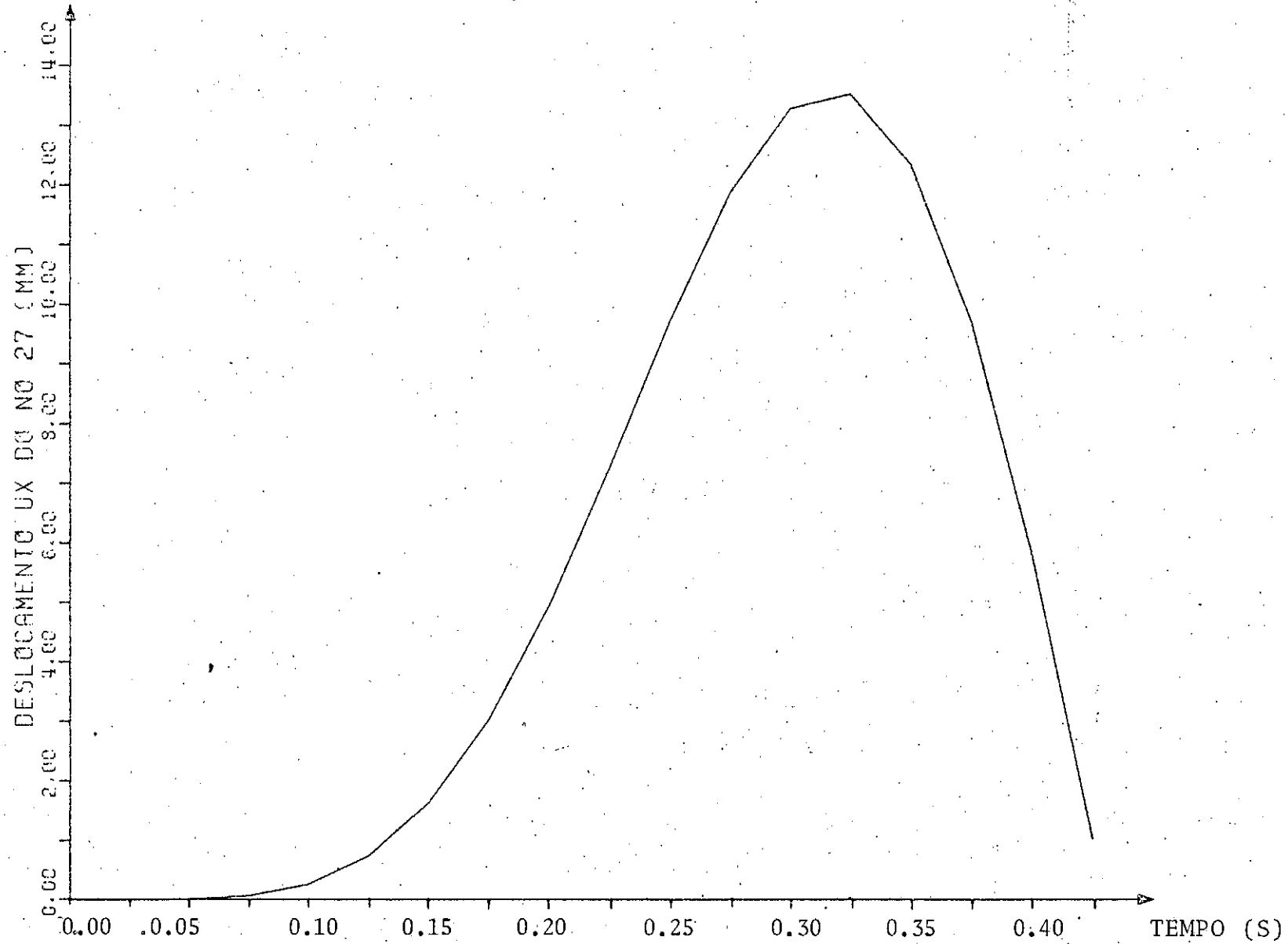


Fig. (VII.6)

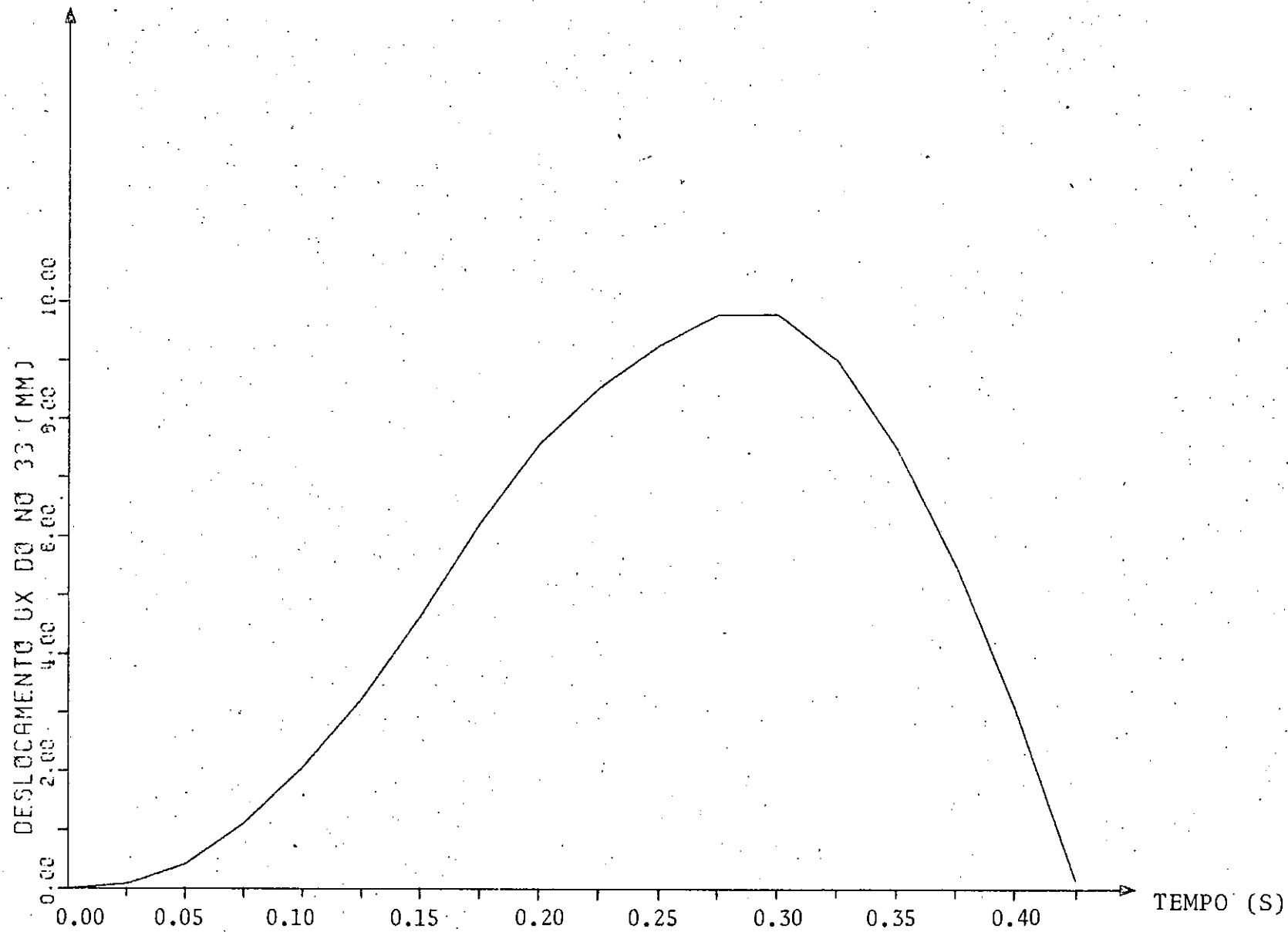


Fig. (VII.7)

$$DLF^{2.7}(\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}) = 1,81$$

e

$$DLF^{3.3}(\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}) = 1,10$$

Os esforços máximos na base são:

ESFORÇO CORTANTE = 138900,45 kN no instante  $t = 0,275$  s  
(barra 3)

MOMENTO FLETOR = 2896798,87 kNm no instante  $t = 0,325$  s  
(não 1)

E os esforços estáticos são:

ESFORÇO CORTANTE (est) = 121103,00 kN  
(barra 3)

MOMENTO FLETOR (est) = 3271522,85 kNm  
(no 1)

Verifica-se então que não há amplificaao para o momento fletor do no 1 e para o esforço cortante da barra 3 o fator de amplificaao máxima é:

$$DLF(\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}) = 1,15$$

(barra 3)



APÊNDICE I

DESENVOLVIMENTOS DO CAPÍTULO III

AI.1 - ALGORITMO HERMITIANO LINEAR

$$\dot{\underline{Y}} = - \underline{A}_2 \underline{Y} + \underline{\bar{P}} \quad (\text{AI.1})$$

$$\underline{A}_2 = \underline{B}_1^{-1} \underline{B}_2 \quad (\text{AI.2})$$

$$\dot{\underline{Y}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{U}} \\ \dot{\underline{U}} \end{Bmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{U}} \\ \underline{U} \end{Bmatrix} \text{ e } \underline{P} = \begin{Bmatrix} \underline{R} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.3})$$

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.4})$$

$$\underline{P} = (1-\zeta) \underline{P}_t + \zeta \underline{P}_{t+\Delta t} \quad (\text{AI.5})$$

$$\begin{aligned} (\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A}_2) \underline{Y}_{t+\Delta t} &= (\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A}_2) \underline{Y}_t + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} - \\ &- \beta_1 \Delta t \underline{\bar{P}}_t \end{aligned} \quad (\text{AI.6})$$

onde  $\alpha_1 = \zeta$  e  $\beta_1 = \zeta - 1$

ou

$${}_1\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} \underline{Y}_{t+\Delta t} = {}_1\bar{\underline{B}}_t \underline{Y}_t + \bar{\Delta \underline{P}}_1 \quad (\text{AI.7})$$

Introduzindo a equação (AI.4) em (AI.2) tem-se:

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} \underline{M}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{C}} & \underline{\bar{K}} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.8})$$

$$\text{onde } \underline{\bar{C}} = \underline{M}^{-1} \underline{C} \text{ e } \underline{\bar{K}} = \underline{M}^{-1} \underline{K}$$

Substituindo a equação (AI.8) em (AI.6) e a seguir em (AI.7) obtêm-se:

$${}_1\bar{\underline{B}}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{C}} & \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{K}} \\ -\alpha_1 \Delta t \underline{I} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.9})$$

$${}_1\bar{\underline{B}}_t = \begin{bmatrix} \underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{\bar{C}} & \beta_1 \Delta t \underline{\bar{K}} \\ -\beta_1 \Delta t \underline{I} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.10})$$

$$\bar{\Delta \underline{P}}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta \underline{R}}_1 \\ \underline{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_t \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.11})$$

$$\text{onde } \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} = \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t} \text{ e } \underline{\bar{R}}_t = \underline{M}^{-1} \underline{R}_t$$

Levando (AI.3), (AI.9), (AI.10) e (AI.11) em (AI.7) obtêm-se:

$$\begin{aligned} (\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{C}}) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{K}} \underline{U}_{t+\Delta t} = (\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{\bar{C}}) \dot{\underline{U}}_t + \\ + \beta_1 \Delta t \underline{\bar{K}} \underline{U}_t + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_t \end{aligned} \quad (\text{AI.12})$$

e

$$\begin{aligned} - \alpha_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{U}_{t+\Delta t} = - \beta_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \underline{U}_t \\ \therefore \underline{U}_{t+\Delta t} = \alpha_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \dot{\underline{U}}_t \end{aligned} \quad (\text{AI.13})$$

Introduzindo (AI.13) em (AI.12) e pré-multiplicando por  $\underline{M}$  ambos os lados da equação vem:

$$\begin{aligned} (\underline{M} + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{C}} + \alpha_1^2 \Delta t^2 \underline{\bar{K}}) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = (\underline{M} + \beta_1 \Delta t \underline{\bar{C}} + \alpha_1 \beta_1 \Delta t^2 \underline{\bar{K}}) \dot{\underline{U}}_t - \\ - \Delta t \underline{\bar{K}} \underline{U}_t + \alpha_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_{t+\Delta t} - \beta_1 \Delta t \underline{\bar{R}}_t \end{aligned} \quad (\text{AI.14})$$

Obs.:  $\beta_1 - \alpha_1 = -1$

## AI.2 - ALGORITMO HERMITIANO CÚBICO I

$$\underline{\bar{F}} = w_t \underline{\bar{F}}_t + \Delta t \underline{\bar{w}}_t \dot{\underline{\bar{F}}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{\bar{F}}_{t+\Delta t} + \Delta t \underline{\bar{w}}_{t+\Delta t} \dot{\underline{\bar{F}}}_{t+\Delta t} \quad (\text{AI.15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ \bar{w}_t = \zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3 \\ w_{t+\Delta t} = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \\ \bar{w}_{t+\Delta t} = -\zeta^2 + \zeta^3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \zeta = \frac{t}{\Delta t} \quad \therefore \quad t = \Delta t \, \zeta \\ dt = \Delta t \, d\zeta \end{array} \quad (\text{AI.16})$$

$$\ddot{\underline{u}} = \underline{M}^{-1} \underline{F} \quad (\text{AI.17})$$

Integrando (AI.17) de  $t$  a  $t + \Delta t$ :

$$\int_t^{t+\Delta t} \ddot{\underline{u}} \, dt = \int_0^{\Delta t} \underline{M}^{-1} \underline{F} \, dt = \Delta t \int_0^1 \underline{M}^{-1} \underline{F} \, d\zeta$$

ou

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} - \dot{\underline{u}}_t = \Delta t \, \underline{M}^{-1} \int_0^1 \underline{F} \, d\zeta \quad (\text{AI.18})$$

Substituindo (AI.15) e (AI.16) em (AI.18) vem:

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} - \dot{\underline{u}}_t = \Delta t \, \underline{M}^{-1} \left( \frac{1}{2} \underline{F}_t + \frac{\Delta t}{12} \dot{\underline{F}}_t + \frac{1}{2} \underline{F}_{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{12} \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t} \right)$$

ou

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + \frac{\Delta t}{12} \underline{M}^{-1} (6\underline{F}_t + \Delta t \, \dot{\underline{F}}_t + 6\underline{F}_{t+\Delta t} - \Delta t \, \dot{\underline{F}}_{t+\Delta t}) \quad (\text{AI.19})$$

Integrando (AI.18) de  $t$  a  $t + \Delta t$ :

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} dt = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\underline{U}}_t dt + \Delta t \underline{M}^{-1} \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_0^1 \underline{F} d\zeta \right) dt$$

ou

$$\underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_t = \dot{\underline{U}}_t \Delta t + \Delta t^2 \underline{M}^{-1} \int_0^1 \left( \int_0^1 \underline{F} d\zeta \right) d\zeta \quad (\text{AI.20})$$

Introduzindo (AI.15) e (AI.16) em (AI.20) vem:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \dot{\underline{U}}_t \Delta t + \Delta t^2 \underline{M}^{-1} & \left( \frac{7}{20} \underline{\underline{F}}_t + \frac{\Delta t}{20} \dot{\underline{\underline{F}}}_t + \frac{3}{20} \underline{\underline{F}}_{t+\Delta t} - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{30} \dot{\underline{\underline{F}}}_{t+\Delta t} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{60} \underline{M}^{-1} (21 \underline{\underline{F}}_t + 3\Delta t \dot{\underline{\underline{F}}}_t + 9 \underline{\underline{F}}_{t+\Delta t} - 2\Delta t \dot{\underline{\underline{F}}}_{t+\Delta t}) \quad (\text{AI.21})$$

### AI.3 - ALGORITMO HERMITIANO CÚBICO III

$$\underline{\bar{P}} = (1 - \zeta) \underline{\bar{P}}_t + \zeta \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} \quad (\text{AI.22})$$

ou

$$\underline{\bar{P}} = w_t \underline{\bar{P}}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{\bar{P}}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{\bar{P}}}_{t+\Delta t} \quad (\text{AI.23})$$

$$\begin{aligned}
 (\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A}_2 + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2^2) \underline{Y}_{t+\Delta t} &= (\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A}_2 + \\
 + \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2^2) \underline{Y}_t + \overline{\Delta P}_3
 \end{aligned}
 \tag{AI.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{w_{t+\Delta t} - \bar{w}'_{t+\Delta t}}{w'_{t+\Delta t}} & \alpha_2 &= \frac{-\bar{w}_{t+\Delta t}}{w'_{t+\Delta t}} \\
 \beta_1 &= \frac{\bar{w}'_t - w_t}{w_{t+\Delta t}} & \beta_2 &= \frac{\bar{w}_t}{w'_{t+\Delta t}}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Obs.}}: \frac{-w'_t}{w'_{t+\Delta t}} = 1$$

Quando  $\bar{P}$  for dado por (AI.22) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta P}_3 &= \left\{ \Delta t \frac{[(1-\zeta) - \bar{w}'_t]}{w'_{t+\Delta t}} \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2 \right\} \bar{P}_t + \\
 &+ \left\{ \Delta t \frac{(\zeta - \bar{w}'_{t+\Delta t})}{w'_{t+\Delta t}} \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2 \right\} \bar{P}_{t+\Delta t}
 \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1-\zeta-\bar{w}'_t}{w'_{t+\Delta t}} = \frac{w_t - \bar{w}'_t - \bar{w}_{t+\Delta t} - \bar{w}_t}{w'_{t+\Delta t}} = -\beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \psi_1$$

$$\frac{\zeta - \bar{w}'_{t+\Delta t}}{w'_{t+\Delta t}} = \frac{w_{t+\Delta t} - \bar{w}'_{t+\Delta t} + \bar{w}_{t+\Delta t} + \bar{w}_t}{w'_{t+\Delta t}} = \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 = \psi_2$$

Logo:

$$\overline{\Delta P}_3 = (\psi_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\bar{P}}_t + (\psi_2 \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} \quad (\text{AI.25})$$

Quando  $\underline{\bar{P}}$  for dado por (AI.23) tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P}_3 = & (-\beta_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\bar{P}}_t + (\alpha_1 \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + \\ & + \frac{\Delta t^2}{w'_{t+\Delta t}} (\bar{w}_t \dot{\underline{\bar{P}}}_t + \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{\bar{P}}}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{AI.26})$$

De (AI.23) tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{P}}_{t+\zeta\Delta t} &= w_t \underline{\bar{P}}_t + \Delta t \bar{w}_t \dot{\underline{\bar{P}}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + \Delta t \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{\bar{P}}}_{t+\Delta t} \\ \therefore \Delta t (\bar{w}_t \dot{\underline{\bar{P}}}_t + \bar{w}_{t+\Delta t} \dot{\underline{\bar{P}}}_{t+\Delta t}) &= \underline{\bar{P}}_{t+\zeta\Delta t} - (w_t \underline{\bar{P}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{\bar{P}}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{AI.27})$$

Multiplicando (AI.27) por  $\frac{\Delta t}{w'_{t+\Delta t}}$  e substituindo

em (AI.26) vem:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P}_3 = & (-\beta_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\overline{P}}_t + (\alpha_1 \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2) \underline{\overline{P}}_{t+\Delta t} + \\ & + \frac{\Delta t}{w'_{t+\Delta t}} [\underline{\overline{P}}_{t+\zeta \Delta t} - (w_t \underline{\overline{P}}_t + w_{t+\Delta t} \underline{\overline{P}}_{t+\Delta t})] \end{aligned}$$

chamando

$$\psi_3 = \frac{1}{w'_{t+\Delta t}}, \quad \psi_4 = - \frac{w_t}{w'_{t+\Delta t}} \text{ e}$$

$$\psi_5 = - \frac{w_{t+\Delta t}}{w'_{t+\Delta t}}, \quad \text{tem-se}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P}_3 = & [(\psi_4 - \beta_1) \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{A}_2] \underline{\overline{P}}_t + \\ & + [(\psi_5 + \alpha_1) \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{A}_2] \underline{\overline{P}}_{t+\Delta t} + \psi_3 \Delta t \underline{\overline{P}}_{t+\zeta \Delta t} \quad (\text{AI.28}) \\ & \sim \sim \sim \end{aligned}$$

$$\underline{\overline{B}}_{11} = \underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{\overline{C}} + \alpha_2 \Delta t^2 (\underline{\overline{C}} \cdot \underline{\overline{C}} - \underline{\overline{K}})$$

$$\underline{\overline{B}}_{12} = \alpha_1 \Delta t \underline{\overline{K}} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{\overline{C}} \cdot \underline{\overline{K}} \quad (\text{AI.29})$$

$$\underline{\overline{B}}_{21} = - \alpha_1 \Delta t \underline{I} - \alpha_2 \Delta t^2 \underline{\overline{C}} \cdot \underline{\overline{K}}$$

$$\underline{\overline{B}}_{22} = \underline{I} - \alpha_2 \Delta t^2 \underline{\overline{K}}$$



$$\begin{aligned}
\bar{B}_{011} &= \underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{C} + \beta_2 \Delta t^2 (\underline{C} \cdot \underline{C} - \underline{K}) \\
\bar{B}_{012} &= \beta_1 \Delta t \underline{K} + \beta_2 \Delta t^2 \underline{C} \cdot \underline{K} \\
\bar{B}_{021} &= -\beta_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{C} \\
\bar{B}_{022} &= \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{K}
\end{aligned}
\tag{AI.30}$$

Para  $\bar{P}$  dado por (AI.22) tem-se:

$$\bar{\Delta P}_{3,1} = (\psi_1 \Delta t \underline{I} - \beta_2 \Delta t^2 \underline{C}) \bar{R}_t + (\psi_2 \Delta t \underline{I} + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{C}) \bar{R}_{t+\Delta t}$$

e

$$\bar{\Delta P}_{3,2} = \beta_2 \Delta t^2 \bar{R}_t - \alpha_2 \Delta t^2 \bar{R}_{t+\Delta t} \tag{AI.31}$$

Para  $\bar{P}$  dado por (AI.23) tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta P}_{3,1} &= [(\psi_4 - \beta_1) \Delta t - \beta_2 \Delta t^2 \underline{C}] \bar{R}_t + [(\psi_5 + \alpha_1) \Delta t \underline{I} + \\
&\quad + \alpha_2 \Delta t^2 \underline{C}] \bar{R}_{t+\Delta t} + \psi_3 \Delta t \bar{R}_{t+\zeta \Delta t} \\
\bar{\Delta P}_{3,2} &= \beta_2 \Delta t^2 \bar{R}_t - \alpha_2 \Delta t^2 \bar{R}_{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

(AI.32)

$${}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{B}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{22} \bar{B}_{11} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \bar{B}_{12} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{22} \\ -\bar{B}_{21} \bar{B}_{11} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{21} & -\bar{B}_{21} \bar{B}_{12} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{22} \bar{B}_{12} = \alpha_1 \Delta t \bar{K} + \alpha_2 \Delta t^2 \bar{C} \bar{K} - \alpha_1 \alpha_2 \Delta t^3 \bar{K}^2 - \alpha_2^2 \Delta t^4 \bar{K} \bar{C} \bar{K}$$

$$\bar{B}_{12} \bar{B}_{22} = \alpha_1 \Delta t \bar{K} + \alpha_2 \Delta t^2 \bar{C} \bar{K} - \alpha_1 \alpha_2 \Delta t^3 \bar{K}^2 - \alpha_2^2 \Delta t^4 \bar{C} \bar{K}^2$$

Como a matriz  $\bar{C}$  é proporcional a  $\bar{K}$  e  $\bar{M}$ :

$$\bar{K} \bar{C} \bar{K} = \bar{K} (\alpha \bar{I} + \beta \bar{K}) \bar{K} = \alpha \bar{K}^2 + \beta \bar{K}^3$$

$$\bar{C} \bar{K}^2 = (\alpha \bar{I} + \beta \bar{K}) \bar{K}^2 = \alpha \bar{K}^2 + \beta \bar{K}^3$$

Como  $\bar{K} \bar{C} \bar{K} = \bar{C} \bar{K}^2$ , tem-se:

$$\bar{B}_{22} \bar{B}_{12} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{22} = 0$$

$$\text{Analogamente: } -\bar{B}_{21} \bar{B}_{11} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{21} = 0$$

e

$$\bar{B}_{22} \bar{B}_{11} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{21} = -\bar{B}_{21} \bar{B}_{12} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{22} = \bar{B}_{t+\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{t+\Delta t} = \bar{M} \bar{B}_{t+\Delta t} &= \bar{M} + a_1 \bar{C} + a_2 \bar{K} + a_3 \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{C} + a_4 \bar{C} \bar{M}^{-1} \bar{K} + \\ &+ a_5 \bar{K} \bar{M}^{-1} \bar{K} \end{aligned}$$

onde

$$a_1 = \Delta t \alpha_1$$

$$a_4 = \Delta t^3 \alpha_1 \alpha_2$$

$$a_2 = \Delta t^2 (\alpha_1^2 - 2\alpha_2)$$

$$a_5 = \Delta t^4 \alpha_2^2$$

$$a_3 = \Delta t^2 \alpha_2$$

$$\begin{aligned} {}_3\bar{B}_{t+\Delta t}^* \cdot {}_3\bar{B}_t &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{22} \bar{B}_{011} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{021} & \bar{B}_{22} \bar{B}_{012} - \bar{B}_{12} \bar{B}_{022} \\ -\bar{B}_{21} \bar{B}_{011} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{021} & -\bar{B}_{21} \bar{B}_{012} + \bar{B}_{11} \bar{B}_{022} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{t11} & \bar{B}_{t12} \\ \bar{B}_{t21} & \bar{B}_{t22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{t11} &= \underline{M} \bar{B}_{t11} = \underline{M} + b_1 \underline{C} + b_2 \underline{K} + b_3 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} + b_4 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{C} + \\ &+ b_5 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K} \end{aligned}$$

onde

$$b_1 = \Delta t \beta_1$$

$$b_4 = \Delta t^3 \alpha_1 \beta_2$$

$$b_2 = \Delta t^2 (\alpha_1 \beta_1 - \beta_2 - \alpha_2)$$

$$b_5 = \Delta t^4 \alpha_2 \beta_2$$

$$b_3 = \Delta t^2 \beta_2$$

$$\underline{B}_{t_{12}} = \underline{M} \underline{\overline{B}}_{t_{12}} = c_1 \underline{K} + c_2 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K} + c_3 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K}$$

onde

$$c_1 = - \Delta t$$

$$c_2 = \Delta t^2 (\beta_2 - \alpha_2)$$

$$c_3 = \Delta t^3 (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)$$

$$\underline{B}_{t_{21}} = \underline{M} \underline{\overline{B}}_{t_{21}} = \overline{c}_1 \underline{M} + \overline{c}_2 \underline{C} + \overline{c}_3 \underline{K}$$

onde

$$\overline{c}_1 = \Delta t$$

$$\overline{c}_2 = \Delta t^2 (\alpha_2 - \beta_2)$$

$$\overline{c}_3 = \Delta t^2 (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_{t_{22}} = \underline{M} \underline{\overline{B}}_{t_{22}} = \underline{M} + \overline{b}_1 \underline{C} + \overline{b}_2 \underline{K} + \overline{b}_3 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{C} + \overline{b}_4 \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{K} + \\ + \overline{b}_5 \underline{K} \underline{M}^{-1} \underline{K} \end{aligned}$$

$$\overline{b}_1 = \Delta t \alpha_1$$

$$\overline{b}_4 = \Delta t^3 \alpha_2 \beta_1$$

$$\overline{b}_2 = \Delta t^2 (\alpha_1 \beta_1 - \beta_2 - \alpha_2)$$

$$\overline{b}_5 = \Delta t^4 \alpha_2 \beta_2$$

$$\overline{b}_3 = \Delta t^2 \alpha_2$$

$${}_3\overline{B}_{t+\Delta t} \cdot \overline{\Delta P}_3 = \begin{bmatrix} \overline{B}_{22} \Delta \overline{P}_{3,1} - \overline{B}_{12} \Delta \overline{P}_{3,2} \\ -\overline{B}_{21} \Delta \overline{P}_{3,1} + \overline{B}_{11} \Delta \overline{P}_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{11} \overline{R} \\ \Delta_{22} \overline{R} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_{11} \underline{R} = \underline{M} \Delta_{11} \underline{\overline{R}} \quad \text{e} \quad \Delta_{22} \underline{R} = \underline{M} \Delta_{22} \underline{\overline{R}}$$

Para  $\overline{\Delta P}_3$  dado por (AI.31) tem-se:

$$\Delta_{11} \underline{R} = (d_1 \underline{M} + d_2 \underline{C} + d_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_t + (e_1 \underline{M} + e_2 \underline{C} + e_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t}$$

e

$$\Delta_{22} \underline{R} = (\overline{d}_1 \underline{M} + \overline{d}_2 \underline{C} + \overline{d}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_t + (\overline{e}_1 \underline{M} + \overline{e}_2 \underline{C} + \overline{e}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t}$$

onde

$$d_1 = \Delta t \psi_1$$

$$e_1 = \Delta t \psi_2$$

$$d_2 = -\Delta t^2 \beta_2$$

$$e_2 = \Delta t^2 \alpha_2$$

$$d_3 = -\Delta t^3 (\alpha_2 \psi_1 + \alpha_1 \beta_2)$$

$$e_3 = \Delta t^3 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \psi_2)$$

$$\overline{d}_1 = \Delta t^2 (\alpha_1 \psi_1 + \beta_2)$$

$$\overline{e}_1 = \Delta t^2 (\alpha_1 \psi_2 - \alpha_2)$$

$$\overline{d}_2 = \Delta t^3 \alpha_2 \psi_1$$

$$\overline{e}_2 = \Delta t^3 \alpha_2 \psi_2$$

$$\overline{d}_3 = -\Delta t^4 \alpha_2 \beta_2$$

$$\overline{e}_3 = \Delta t^4 \alpha_2^2$$

Para  $\overline{\Delta P}_3$  dado por (AI.32) tem-se:

$$\Delta_{11}\underline{R} = (\underline{f}_1 \underline{M} + \underline{f}_2 \underline{C} + \underline{f}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_t + (\underline{g}_1 \underline{M} + \underline{g}_2 \underline{C} + \underline{g}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t} +$$

$$+ (\underline{h}_1 \underline{M} + \underline{h}_2 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\zeta \Delta t}$$

e

$$\Delta_{22}\underline{R} = (\overline{\underline{f}}_1 \underline{M} + \overline{\underline{f}}_2 \underline{C} + \overline{\underline{f}}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_t + (\overline{\underline{g}}_1 \underline{M} + \overline{\underline{g}}_2 \underline{C} + \overline{\underline{g}}_3 \underline{K}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\Delta t} +$$

$$+ (\overline{\underline{h}}_1 \underline{M} + \overline{\underline{h}}_2 \underline{C}) \underline{M}^{-1} \underline{R}_{t+\zeta \Delta t}$$

$$\underline{f}_1 = \Delta t (\psi_4 - \beta_1) \qquad \underline{g}_1 = \Delta t (\psi_5 + \alpha_1)$$

$$\underline{f}_2 = - \Delta t^2 \beta_2 \qquad \underline{g}_2 = \Delta t^2 \alpha_2$$

$$\underline{f}_3 = - \Delta t^3 (\alpha_2 \psi_4 - \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2) \qquad \underline{g}_3 = - \Delta t^3 \alpha_2 \psi_5$$

$$\overline{\underline{f}}_1 = \Delta t^2 (\alpha_1 \psi_4 - \alpha_1 \beta_1 + \beta_2) \qquad \overline{\underline{g}}_1 = \Delta t^2 (\alpha_1 \psi_5 + \alpha_1^2 - \alpha_2)$$

$$\overline{\underline{f}}_2 = \Delta t^3 (\alpha_2 \psi_4 - \alpha_2 \beta_1) \qquad \overline{\underline{g}}_2 = \Delta t^3 (\alpha_2 \psi_5 + \alpha_2 \alpha_1)$$

$$\overline{\underline{f}}_3 = - \Delta t^4 \alpha_2 \beta_2 \qquad \overline{\underline{g}}_3 = \Delta t^4 \alpha_2^2$$

$$\underline{h}_1 = \Delta t \psi_3 \qquad \overline{\underline{h}}_1 = \Delta t^2 \alpha_1 \psi_3$$

$$\underline{h}_2 = - \Delta t^3 \alpha_2 \psi_3 \qquad \overline{\underline{h}}_2 = \Delta t^3 \alpha_2 \psi_3$$

#### AI.4 - ALGORITMO HERMITIANO CÚBICO IV

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} + \theta \Delta t \underline{\underline{A}}_2 \quad (\text{AI.33})$$

$$\underline{\underline{\bar{H}}} = \underline{\underline{I}} + \bar{\theta} \Delta t \underline{\underline{A}}_2 \quad (\text{AI.34})$$

$$\theta = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \bar{\theta} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\bar{\theta} - \theta = \frac{-i}{2 \sqrt{3}} \quad (\text{AI.35})$$

$$(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} \cdot \frac{(\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{\bar{H}}})}{\bar{\theta} - \theta} = (\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \frac{(\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{\bar{H}}})}{\bar{\theta} - \theta} = \frac{(\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} - (\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{\bar{H}}}}{\bar{\theta} - \theta} \quad (\text{AI.36})$$

Substituindo (AI.8) em (AI.33) e em (AI.34) verifica-se que:

$$(\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} = \underline{\underline{\bar{H}}}^{-1} \quad (\text{AI.37})$$

Verifica-se também que, desde que se utilize amortecimento proporcional ( $\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}} \rightarrow \underline{\underline{\bar{C}}} \underline{\underline{\bar{K}}} = \underline{\underline{\bar{K}}} \underline{\underline{\bar{C}}}$ ):

$$\underline{\underline{\bar{H}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\bar{H}}} = \underline{\underline{\bar{H}}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}$$

Consequentemente tem-se que:

$$(\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{\bar{H}}} = (\underline{\underline{\bar{H}}})^{-1} \underline{\underline{\bar{H}}} \underline{\underline{H}}^{-1} = \underline{\underline{H}}^{-1} \quad (\text{AI.38})$$

Levando (AI.38) em (AI.36) vem:

$$(\underline{H} \quad \underline{\bar{H}})^{-1} \frac{(\underline{H} - \underline{\bar{H}})}{\underline{\theta} - \underline{\theta}} = \frac{(\underline{\bar{H}})^{-1} - \underline{H}^{-1}}{\underline{\theta} - \underline{\theta}} \quad (\text{AI.39})$$

A matriz complexa  $\underline{H}$  pode ser escrita sob a forma:

$$\underline{H} = \text{Re}\{\underline{H}\} + \text{Im}\{\underline{H}\}i \quad (\text{AI.40})$$

Finalmente, introduzindo (AI.35) e (AI.37) em (AI.39) e tendo em vista (AI.40), chega-se a:

$$\begin{aligned} (\underline{H} \quad \underline{\bar{H}})^{-1} \frac{(\underline{H} - \underline{\bar{H}})}{\underline{\theta} - \underline{\theta}} &= \frac{\underline{\bar{H}}^{-1} - \underline{H}^{-1}}{-\frac{i}{2\sqrt{3}}} = \frac{-2 \text{Im}\{\underline{H}^{-1}\}i}{-\frac{i}{2\sqrt{3}}} = \\ &= 4\sqrt{3} \text{Im}\{\underline{H}^{-1}\} \\ &\quad \sim \sim \sim \\ \underline{V}_t &= -\underline{A}_2^{-1} \left[ \frac{1}{6} (\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t} + 4\underline{\bar{P}}_{t+\Delta t/2} + \underline{\bar{P}}_t) \right] = \begin{Bmatrix} \underline{\psi}_t \\ \underline{\phi}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.41}) \end{aligned}$$

De (AI.2) tem-se que:

$$\underline{A}_2^{-1} = \underline{B}_2^{-1} \underline{B}_1 \quad (\text{AI.42})$$

Lembrando que  $\underline{\bar{P}} = \underline{B}_1^{-1} \underline{P}$  e pré-multiplicando (AI.41) por  $\underline{B}_2$  vem:



$$\underline{B}_2 \underline{V}_t = - \underline{B}_2 \underline{A}_2^{-1} \underline{B}_1^{-1} \left[ \frac{1}{6} (\underline{P}_{t+\Delta t} + 4\underline{P}_{t+\Delta t/2} + \underline{P}_t) \right] \quad (\text{AI.43})$$

$$\underline{B}_2 \underline{A}_2^{-1} \underline{B}_1^{-1} = \underline{I} \quad (\text{ver (AI.42)})$$

Substituindo  $\underline{B}_2$  (ver (AI.4)) em (AI.43) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_t \\ \underline{\phi}_t \end{bmatrix} = - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \underline{R}_{t+\Delta t} + 4\underline{R}_{t+\Delta t/2} + \underline{R}_t \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ou então:

$$\begin{cases} \underline{C} \underline{\psi}_t + \underline{K} \underline{\phi}_t = - \frac{1}{6} (\underline{R}_{t+\Delta t} + 4\underline{R}_{t+\Delta t/2} + \underline{R}_t) \end{cases} \quad (\text{AI.44})$$

$$\begin{cases} - \underline{\psi}_t + \underline{0} \underline{\phi}_t = \underline{0} \quad \dots \quad \underline{\psi}_t = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{AI.45})$$

Introduzindo (AI.45) em (AI.44) vem:

$$\underline{\phi}_t = - \frac{1}{6} \underline{K}^{-1} (\underline{R}_{t+\Delta t} + 4\underline{R}_{t+\Delta t/2} + \underline{R}_t)$$

~ " ~

$$\Theta = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\underline{\gamma}_t = \underline{U}_t + \underline{\phi}_t + \Theta \Delta t \underline{\delta}_t$$

$$\underline{\gamma}_t = \text{Re } \underline{\gamma}_t + \text{Im } \underline{\gamma}_t i ; \underline{\delta}_t = \text{Re } \underline{\delta}_t + \text{Im } \underline{\delta}_t i$$

$$\operatorname{Re} \underline{\gamma}_t = \operatorname{Re}(\theta \Delta t \underline{\delta}_t) + \underline{u}_t + \underline{\phi}_t$$

$$\operatorname{Im} \underline{\gamma}_t = \operatorname{Im}(\theta \Delta t \underline{\delta}_t)''$$

$$\theta \Delta t \underline{\delta}_t = \Delta t \left( \frac{1}{4} + \frac{i}{4\sqrt{3}} \right) (\operatorname{Re} \underline{\delta}_t + \operatorname{Im} \underline{\delta}_t \cdot i) =$$

$$= \Delta t \left[ \frac{\operatorname{Re} \underline{\delta}_t}{4} - \frac{\operatorname{Im} \underline{\delta}_t}{4\sqrt{3}} + \left( \frac{\operatorname{Re} \underline{\delta}_t}{4\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{Im} \underline{\delta}_t}{4} \right) i \right]$$

Logo:

$$4\sqrt{3} \operatorname{Im}(\theta \Delta t \underline{\delta}_t) = \Delta t (\operatorname{Re} \underline{\delta}_t + \sqrt{3} \operatorname{Im} \underline{\delta}_t)$$

APÊNDICE IIDESENVOLVIMENTOS DO CAPÍTULO IVAII.1 - MATRIZES DE AMPLIFICAÇÃO A DOS DIVERSOS MÉTODOSAII.1.1 - Método das Diferenças Centrais (ver item III.1)

Escrevendo (IV.1) no instante  $\underline{t}$ , tem-se:

$$\ddot{x}_t + 2\xi \omega \dot{x}_t + \omega^2 x_t = r_t \quad (\text{AII.1})$$

Reescrevendo (III.3) e (III.4) para um grau de liberdade, vem:

$$\begin{cases} \ddot{x}_t = \frac{1}{\Delta t^2} \{x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}\} & (\text{AII.2}) \\ \dot{x}_t = \frac{1}{2\Delta t} \{-x_{t-\Delta t} + x_{t+\Delta t}\} & (\text{AII.3}) \end{cases}$$

Substituindo (AII.2) e (AII.3) em (AII.1), vem:

$$x_{t+\Delta t} = \frac{2-\omega^2\Delta t^2}{1+\xi\omega\Delta t} x_t - \frac{1-\xi\omega\Delta t}{1+\xi\omega\Delta t} x_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{1+\xi\omega\Delta t} r_t$$

Fazendo  $r_t = 0$  e  $\xi = 0$ , tem-se:

$$x_{t+\Delta t} = (2 - \omega^2\Delta t^2) x_t - x_{t-\Delta t} \quad (\text{AII.4})$$

Escrevendo (AII.4) sob a forma recursiva da equação (IV.2), vem:

$$\begin{Bmatrix} x_{t+\Delta t} \\ x_t \end{Bmatrix} = \underline{A} \begin{Bmatrix} x_t \\ x_{t-\Delta t} \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.5})$$

#### AII.1.2 - Método de Wilson- $\theta$ (ver item III.2)

Escrevendo (IV.1) no instante  $t + \theta \Delta t$ , tem-se:

$$\ddot{x}_{t+\theta \Delta t} + 2\xi\omega\dot{x}_{t+\theta \Delta t} + \omega^2 x_{t+\theta \Delta t} = r_{t+\theta \Delta t} \quad (\text{AII.6})$$

Reescrevendo (III.8), (III.9) e (III.10) para um grau de liberdade, vem:

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + (\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t) \frac{\tau}{\Delta t} \quad (\text{AII.7})$$

$$\dot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t \tau + (\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t) \frac{\tau^2}{2\Delta t} + \dot{x}_t \quad (\text{AII.8})$$

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}_t \tau^2 + (\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t) \frac{\tau^3}{6\Delta t} \quad (\text{AII.9})$$

No instante  $t + \Delta t$ , tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + (\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t) \frac{\Delta t}{2} \end{array} \right. \quad (\text{AII.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + (2\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \frac{\Delta t^2}{6} \end{array} \right. \quad (\text{AII.11})$$

Escrevendo (AII.7), (AII.8) e (AII.9) para o instante  $\tau = \theta \Delta t$  e substituindo em (AII.6), com  $r_{t+\theta \Delta t} = 0$  e  $\xi = 0$ , vem:

$$\begin{aligned} \left( \theta + \frac{\omega^2 \theta^3 \Delta t^2}{6} \right) \ddot{x}_{t+\Delta t} &= \left( \frac{\omega^2 \theta^3 \Delta t^2}{6} + \theta - 1 - \frac{\omega^2 \theta^2 \Delta t^2}{2} \right) \ddot{x}_t - \\ &- \omega^2 x_t - \omega^2 \theta \Delta t \dot{x}_t \end{aligned} \quad (\text{AII.12})$$

Dividindo ambos os lados de (AII.12) por  $\omega^2 \Delta t^2$  e chamando  $\beta = \frac{6\omega^2 \Delta t^2}{\theta(6+\theta^2\omega^2 \Delta t^2)}$ , vem:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \left( 1 - \frac{\beta \theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} \right) \ddot{x}_t - \frac{\beta \theta}{\Delta t} \dot{x}_t - \frac{\beta}{\Delta t^2} x_t \quad (\text{AII.13})$$

Introduzindo (AII.13) em (AII.10) e (AII.11) chega-se à forma recursiva da equação (IV.2):

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_t \\ \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} & -\frac{\beta\theta}{\Delta t} & -\frac{\beta}{\Delta t^2} \\ \Delta t \left[ 1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} \right] & 1 - \frac{\beta\theta}{2} & -\frac{\beta}{2\Delta t} \\ \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} \right] & \Delta t \left( 1 - \frac{\beta\theta}{6} \right) & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.14})$$

Para o caso particular do Método de Aceleração Linear, em que  $\theta = 1,0$ , a equação (AII.6) fica:

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} = -\omega^2 x_{t+\theta\Delta t} \quad (\text{AII.15})$$

Logo a 1.<sup>a</sup> linha da matriz A fica L.D. com a 3.<sup>a</sup>, o que permite reescrever A 2x2 em vez de 3x3:

Levando (AII.15) em (AII.10) e (AII.11) e rearranjando, chega-se ã:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta}{2} & -\omega^2 \Delta t \left[ \beta \left( \frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} - \frac{1}{12} \right) \right] \\ \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t} & 1 - \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

ou então

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{3} & -\omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^3}{12} \\ 1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6} & 1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6} \\ \frac{\Delta t}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6}} & 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{3} \\ 1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6} & 1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.16})$$

### AII.1.3 - Método de Newmark (ver item III.3)

Escrevendo (IV.1) no instante  $t + \Delta t$ , tem-se:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\xi\omega\dot{x}_{t+\Delta t} + \omega^2 x_{t+\Delta t} = r_{t+\Delta t} \quad (\text{AII.17})$$

Reescrevendo (III.18) e (III.19) para um grau de liberdade, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + [(1-\delta) \ddot{x}_t + \delta \ddot{x}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t \quad (\text{AII.18}) \\ x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_t + \alpha \ddot{x}_{t+\Delta t} \right] \cdot \Delta t^2 \quad (\text{AII.19}) \end{array} \right.$$

Para  $r_{t+\Delta t}$  e  $\xi = 0$ , a equação (AII.17) fica:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = -\omega^2 x_{t+\Delta t} \quad (\text{AII.20})$$

Introduzindo (AII.19) em (AII.20) e dividindo ambos os lados de (AII.20) por  $\omega^2 \Delta t^2$ , vem:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} \frac{(1 + \alpha \omega^2 \Delta t^2)}{\omega^2 \Delta t^2} = - \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_t - \frac{1}{\Delta t} \dot{x}_t - \frac{1}{\Delta t^2} x_t \quad (\text{AII.21})$$

Chamando  $\beta = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{1 + \alpha \omega^2 \Delta t^2}$  e substituindo (AII.21) em

(AII.18) e em (AII.19), chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_t \\ \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\beta & -\frac{\beta}{\Delta t} & -\frac{\beta}{\Delta t^2} \\ \Delta t \left[1 - \delta - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\delta\beta\right] & 1 - \beta\delta & -\frac{\beta\delta}{\Delta t} \\ \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \alpha - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\alpha\beta\right] & \Delta t(1 - \alpha\beta) & 1 - \alpha\beta \end{bmatrix} \quad (\text{AII.22})$$

Tendo em vista (AII.20), pode-se reescrever  $\underline{A}$  2x2 em vez de 3x3 já que a 1.<sup>a</sup> linha de  $\underline{A}$  é L.D. com a 3.<sup>a</sup>.

Substituindo as equações  $\ddot{x}_t = -\omega^2 x_t$  e (AII.20) em (AII.18) e em (AII.19) e rearranjando chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{A} \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\delta & -\omega^2 \Delta t \left(1 - \frac{\beta}{2} \delta\right) \\ \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t} & 1 - \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

Para  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$  (regra trapezoidal) tem-se:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\omega^2\Delta t^2}{4+\omega^2\Delta t^2} & -\omega^2\Delta t + \frac{\omega^4\Delta t^3}{4+\omega^2\Delta t^2} \\ \frac{4\Delta t}{4+\omega^2\Delta t^2} & 1 - \frac{2\omega^2\Delta t^2}{4+\omega^2\Delta t^2} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.23})$$

#### AII.1.4 - Algoritmo Hermitiano Linear (ver item III.4.1)

Reescrevendo (III.35) para um grau de liberdade, vem:

$${}_1\bar{\underline{b}}_{t+\Delta t} \underline{y}_{t+\Delta t} = {}_1\bar{\underline{b}}_t \underline{y}_t + \underline{\Delta p}_1 \quad (\text{AII.24})$$

Fazendo  $r = 0$  e  $\xi = 0$ , tem-se (Ver (AI.3) e (AI.9) a (AI.11)):

$${}_1\bar{\underline{b}}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1\omega^2\Delta t \\ -\alpha_1\Delta t & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix}$$

$${}_1\bar{\underline{b}}_t = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1\omega^2\Delta t \\ -\beta_1\Delta t & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{y}_t = \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\Delta p}_1 = \begin{Bmatrix} \alpha_1\Delta t \cdot r_{t+\Delta t} - \beta_1\Delta t \cdot r_t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo pode-se escrever (AII.24) sob a forma recursiva de (IV.2):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underset{\sim}{A} = (\underset{\sim}{B}_{t+\Delta t})^{-1} \cdot \underset{\sim}{B}_t \dots$$

$$\therefore \underset{\sim}{A} = \frac{1}{1+\alpha_1 \omega^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 \omega^2 \Delta t \\ \alpha_1 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \omega^2 \Delta t \\ -\beta_1 \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando que:

$$\beta_1 - \alpha_1 = -1 \text{ e } \alpha_1 - \beta_1 = 1 :$$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{1+\alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t & -\omega^2 \Delta t \\ \Delta t & 1 + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.25})$$

Para  $\zeta = 1/2$  (regra trapezoidal),  $\alpha_1 = 1/2$  e

$$\beta_1 = -1/2:$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}} & \frac{-\omega^2 \Delta t}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}} \\ \frac{\Delta t}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}} & \frac{1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.26})$$

Comparando (AII.23) e (AII.26) observa-se que as matrizes de amplificação  $\underline{A}$  dos algoritmos de Newmark e Hermitia no linear são equivalentes no caso da regra trapezoidal.

#### AII.1.5 - Algoritmo Hermitiano Cúbico I (ver item III.4.2)

Reescrevendo (III.40), (III.44) e (III.45) para um grau de liberdade, vem:

$$m\ddot{x} = f = r - kx - c\dot{x} \quad (\text{AII.27})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{\Delta t}{12m} [6f_t + \Delta t \dot{f}_t + 6f_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{f}_{t+\Delta t}] \end{cases} \quad (\text{AII.28})$$

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{60m} [21f_t + 3\Delta t \dot{f}_t + 9f_{t+\Delta t} - 2\Delta t \dot{f}_{t+\Delta t}] \end{cases} \quad (\text{AII.29})$$

Fazendo  $r = 0$  e  $\xi = 0$  em (AII.27) e substituindo em (AII.28) e (AII.29), tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_t - \frac{\omega^2 \Delta t}{2} x_t - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12} \dot{x}_t - \frac{\omega^2 \Delta t}{2} x_{t+\Delta t} + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12} \dot{x}_{t+\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (\text{AII.30})$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= x_t + \dot{x}_t \Delta t - \frac{21}{60} \omega^2 \Delta t^2 x_t - \frac{3\omega^2 \Delta t^3}{60} \dot{x}_t - \frac{9\omega^2 \Delta t^2}{60} x_{t+\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (\text{AII.31})$$

Manipulando (AII.30) e (AII.31) chega-se à forma recursiva de (IV.2):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{15} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \Delta t^4} \begin{bmatrix} 1 - \frac{13}{30} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \Delta t^4 & -\omega^2 \Delta t \left( 1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2 \right) \\ \Delta t \left( 1 - \frac{1}{10} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{720} \omega^4 \Delta t^4 \right) & 1 - \frac{13}{30} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \Delta t^4 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.32})$$

#### AII.1.6 - Algoritmo Hermitiano Cúbico III (ver item III.4.4)

Reescrevendo (III.68) para um grau de liberdade, vem:

$${}_3\bar{b}_{t+\Delta t} \cdot y_{t+\Delta t} = {}_3\bar{b}_t \cdot y_t + \bar{\Delta} p_3 \quad (\text{AII.33})$$

Fazendo  $r = 0$  e  $\xi = 0$ , tem-se (ver (AI.3), (III.69), (III.70) , (AI.29) a (AI.32) ;:

$${}_3\bar{b}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2 & \alpha_1 \omega^2 \Delta t \\ -\alpha_1 \Delta t & 1 - \alpha_2 \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \underline{y}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix}$$

$${}_3\bar{b}_t = \begin{bmatrix} 1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2 & \beta_1 \omega^2 \Delta t \\ -\beta_1 \Delta t & 1 - \beta_2 \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} ; \underline{y}_t = \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

$$\Delta \bar{p}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo, pode-se escrever (AII.33) sob a forma recursiva de (IV.2):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{A} \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{A} = (\underline{B}_{t+\Delta t})^{-1} \cdot \underline{B}_t \dots$$

$$\therefore \underline{A} = \frac{1}{(1-\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2 \Delta t^2} \times \begin{bmatrix} (1-\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)(1-\beta_2 \omega^2 \Delta t^2) + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 \\ \alpha_1 \Delta t (1-\beta_2 \omega^2 \Delta t^2) - \beta_1 \Delta t (1-\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2) \\ \beta_1 \omega^2 \Delta t (1-\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2) - \alpha_1 \omega^2 \Delta t (1-\beta_2 \omega^2 \Delta t^2) \\ (1-\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2)(1-\beta_2 \omega^2 \Delta t^2) + \alpha_1 \beta_1 \omega^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.34})$$

Para  $\zeta = 1/2$  ( $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\beta_1 = -1/2$ ,  $\alpha_2 = \beta_2 = 1/12$ ), tem-se:

$$\underline{A} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12} + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{144}} \times \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{12} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{144} & -\omega^2 \Delta t (1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12}) \\ \Delta t (1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12}) & 1 - \frac{5}{12} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{\omega^4 \Delta t^4}{144} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.35})$$

## AII.2 - MATRIZ DE AMPLIFICAÇÃO ( $\underline{A}_0$ ) DA SOLUÇÃO EXATA DE (IV.1)

Fazendo  $r = 0$  e  $\xi = 0$  em (IV.1) tem-se:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{AII.36})$$

cuja solução é

$$x = a e^{+i\omega t} = a \cos \omega t + a i \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (\text{AII.37})$$

Admitindo que para  $t = 0$ ,  $x = 1$  e  $\dot{x} = 0$ , tem-se:

$$a = 1 \quad \text{e} \quad b = 0$$

Substituindo  $a$  e  $b$  em (AII.37), vem:

$$x = \cos \omega t \quad (\text{AII.38})$$

Derivando (AII.38), vem:

$$\dot{x} = -\omega \sin \omega t \quad (\text{AII.39})$$

Discretizando o tempo em intervalos  $\Delta t$  nas equações (AII.38) e (AII.39), tem-se:

$$x_t = \cos \omega t, \quad \dot{x}_t = -\omega \sin \omega t$$

$$x_{t+\Delta t} = \cos \omega(t+\Delta t), \quad \dot{x}_{t+\Delta t} = -\omega \sin \omega(t+\Delta t)$$

Lembrando que:

$$\cos \omega(t+\Delta t) = \cos \omega t \cos \omega \Delta t - \sin \omega t \sin \omega \Delta t \quad \text{e}$$

$$\sin \omega(t+\Delta t) = \sin \omega t \cos \omega \Delta t + \sin \omega \Delta t \cos \omega t.$$

Tem-se:



$$x_{t+\Delta t} = (\cos \omega \Delta t) x_t + \left(\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega \Delta t\right) \dot{x}_t$$

e

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = (-\omega \operatorname{sen} \omega \Delta t) x_t + (\cos \omega \Delta t) \dot{x}_t$$

Chega-se assim à forma recursiva de (IV.2):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{A}_0 \begin{Bmatrix} \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix}$$

onde

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos \omega \Delta t & -\omega \operatorname{sen} \omega \Delta t \\ \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega \Delta t & \cos \omega \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{AII.40})$$

APÊNDICE. IIIDESCRIÇÃO E MANUAL DE ENTRADA DO  
PROGRAMA SAND-AIDAIII.1 - INTRODUÇÃO

O programa SAND-AID (Sistema de ANálise Dinâmica para Estruturas Reticulares - Algoritmos de Integração Direta) foi desenvolvido na linguagem FORTRAN IV com precisão dupla para o computador Burroughs B-6700.

Este programa resolve várias estruturas e para cada uma pode resolver vários carregamentos simultaneamente (desde que se utilize o mesmo intervalo de integração). As matrizes de massa, rigidez e amortecimento são armazenadas em faixa e a resolução do sistema de equações é feita pelo método de eliminação de Gauss (todas as equações são levadas em conta, inclusive as correspondentes às direções restringidas).

Os seguintes tipos de estruturas reticulares podem ser usados: treliça plana e espacial, pórtico plano e espacial, grelha e barra sujeita a deformação axial. A entrada de dados deve ser feita em unidades coerentes e é facilitada por meio de comandos de geração automática aproveitando a semelhança das coordenadas dos nós, propriedades das barras, etc.

O programa está dimensionado da seguinte maneira:

Nº DE NÓS - 100

Nº DE BARRAS - 130

Nº DE APOIOS - 100

Nº DE APOIOS ELÁSTICOS - 20

Nº DE TIPOS DE MATERIAL - 3

Nº DE INTERVALOS DE INTEGRAÇÃO - 10

Nº DE CARREGAMENTOS - 15

podendo ser modificado quando houver necessidade.

No item AIII.2 está o manual de entrada do programa. Todas as matrizes e vetores utilizados no programa estão armazenados em dois ou mais vetores de trabalho (dimensionamento dinâmico) mostrados no item AIII.3.

AIII.2 - MANUAL DE ENTRADA DO PROGRAMA

Nº DE ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	1	NPROB, INES	2I5
2	1	TIT1	20A4
3	1	NNOS, NELMS, NCC, NTM, NDESNO, NCOR, NALF, NAE	8I10
4	VAR.	L, (CORD(L,M),M=1,NCOR), NINC, INC, (VAR(M),M=1, NCOR)	I10, NCORxF10.0 2I5,NCORxF10.0
5	VAR.	L, (NDN(L,M),M=1,NNOELM),IMAT(L), ANG(L),NINC, INC1, INC2	4I10, F10.0, I10, 2I5
6	NTM	K, (ELAST(K,M),M=1,2),RO(K)	I10, 3F15.0
7	VAR.	NINC, INC, L, (CGEOM(L,M),M=1, NCGEOM)	2I5, I10, 4F10.0
8	VAR.	NNR( ICT), NTC( ICT), INC, NINC	4I10
9	NAE	K, (RAE(L,M),M=1,NDESNO)	INES≠5: I10, 3F20.0 INES=5: I10, 3F20.0, 10X, 3F20.0
10	1	INDM, INDC, ALF, BET	2I10, 2F10.0
11	1	PAS, IESF, IFOR, IPR	F10.0, 3I10
12	1	NCAR	I5
13	1	IDVI (N)	I5
*1	NNOS	NNOD(NND), (UO(NND,L), L=1, NDESNO)	I10, 6F10.0
		(VO(NND,L),L=1,NDESNO)	10X, 6F10.0
15	1	NO(N), IND(N), OM(N), T1(N), T2(N), GAMA(N), ALFA(N)	2I5, 3F15.0, 2F10.0
*2	VAR.	NINC, INC, NNOC(NNC, N), (CCNO(NNC,L,N),L=1, NDESNO)	2I5, I10, 6F10.0

continua...

\*4 {

Nº DE ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
17	1	NDEL	I5
18	NDEL	DEL(NN) , NETA(NN+1)	F15.0, I5
19	VAR.	NINC, INC, NNOM(NNC), (CM(NNC,L),L=1, NDESNO)	2I5, I10, 6F10.0
20	1	CONSTANTE(S) DOS ALGORITMOS	F10.0 ou 2F10.0

\*1 - sô para  $IDVI(N) \neq 0$

\*2 - sô para  $NO(N) \neq 0$

\*3 - NCAR vezes

\*4 - sô no caso de  $INDM = 3$

## DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS

### 1. NPROB - número da estrutura a ser resolvida

INES - tipo de estrutura reticular a ser resolvida

INES = 1 - treliça plana

INES = 2 - pórtico plano

INES = 3 - grelha

INES = 4 - treliça espacial

INES = 5 - pórtico espacial

INES = 6 - barra sujeita a deformação axial

OBS.: Após o último cartão de dados, deve-se colocar 1 cartão com NPROB = 0 para a parada do programa.

### 2. TIT1 - título do problema

### 3. NNOS - número de nós da estrutura

NELMS - número de barras (elementos) da estrutura

NCC - número de nós com alguma direção restringida (número de apoios)

NTM - número de tipos de material

NDESNO - número de deslocamentos por nó

NCOR - número de coordenadas por nó

NALF - variável que indica se os eixos principais da seção das barras coincidem ou não com os eixos locais y e z

NALF = 0 - coincidem

NALF = 1 - não coincidem

NAE - número de apoios elásticos

#### 4. Coordenadas dos nós

L - número do nó

CORD(L,M) - coordenadas do nó no sistema global (X ou X, Y ou X, Y, Z)

NINC - número de nós com coordenadas semelhantes a L a serem gerados

INC - incremento na numeração dos nós semelhantes (a ser somado a L)

VAR(M) - variações nas coordenadas dos nós semelhantes (a serem somadas às coordenadas do nó L (CORD(L,M))).

#### 5. Incidência dos elementos

L - número do elemento

NNOELM - número de nós por elemento (foi usado neste programa NNOELM = 2, mas pode ser mudado quando houver necessidade)

NDN(L,1) - nó inicial do elemento L

NDN(L,2) - nó final do elemento L

IMAT(L) - índice do material do elemento L

ANG(L) - ângulo que os eixos principais da seção do elemento L fazem com os eixos locais Y e Z

NINC - número de elementos com incidência semelhante a L a serem gerados

INC1 - incremento na numeração dos elementos semelhantes a L (a ser somado a L)

INC2 - incremento na numeração dos nós iniciais e finais dos elementos semelhantes a L (a ser somado a NDN(L,M))

## 6. Características dos materiais

K - índice do material (varia de 1 a NTM)

ELAST(K,1) - módulo de elasticidade longitudinal do material  
K

ELAST(K,2) - módulo de elasticidade transversal do material  
K

RO(K) - massa específica do material K

## 7. Características geométricas dos elementos (área (A) e momentos de inércia ( $I_x$ , $I_y$ , $I_z$ ) da seção transversal)

L - número do elemento

NCGEOM - número de características geométricas dos elementos  
para INES = 1,4 ou 6 → NCGEOM = 1

INES = 2 → NCGEOM = 2

INES = 3 → NCGEOM = 3

INES = 5 → NCGEOM = 4

CGEOM(L,1) = A

para INES = 2 : CGEOM(L,2) =  $I_z$

INES = 3 : CGEOM(L,2) =  $I_x$ , CGEOM(L,3) =  $I_y$

INES = 5 : CGEOM(L,2) =  $I_z$ , CGEOM(L,3) =  $I_x$ ,

CGEOM(L,4) =  $I_y$

NINC - número de elementos com características geométricas  
semelhantes a serem gerados

INC - incremento na numeração dos elementos semelhantes (a  
ser somado a L)



## 8. Apoios

ICT - contador, varia de 1 a NCC

NNR(ICT) - número do nó restringido

NTC(ICT) - variável que define as direções restringidas dos apoios

$NTC(ICT) = I_1 I_2 \dots I_{NDESNO}$

$I_i = 0$  a direção  $i$  não é restringida

$I_i = 1$  a direção  $i$  é restringida

NINC - número de apoios semelhantes a serem gerados

INC - incremento na numeração dos nós (apoios) semelhantes (a ser somado a NNR(ICT))

## 9. K - número do nó que é apoio elástico

L - contador que varia de 1 a NAE

RAE(L,M) - rigidez do apoio elástico na direção M

## 10. INDM - variável que indica o tipo de matriz de massa a ser usado

INDM = 1 - matriz de massa agrupada

INDM = 2 - matriz de massa consistente

INDM = 3 - matriz de massa discreta lida

INDC - variável que indica se a matriz de amortecimento é nula ou não

INDC = 1 é nula

INDC = 2 não é nula

ALF e BET - coeficientes de proporcionalidade que definem a matriz de amortecimento (no caso de INDC = 2)

11. PAS - passo das etapas que se deseja imprimir

IESF - variável que indica se serão calculados ou não os es  
forços

IESF = 0 não calcula os esforços

IESF = I calcula os esforços de I em I elementos

IFOR = 0 não imprime o vetor de forças

IFOR = 1 imprime o vetor de forças apenas nos nós carrega-  
dos

IFOR = 2 imprime o vetor de forças completo

IPR - variável que indica quais vetores que serão impressos

IPR = 0 não imprime os vetores de deslocamentos, veloci-  
dades e acelerações

IPR = 1 - só imprime o vetor de deslocamentos

IPR = 2 - imprime o vetor de deslocamentos e o de veloci-  
dades

IPR = 3 - imprime o vetor de deslocamentos, o de veloci-  
dades e o de acelerações

12. NCAR - número de carregamentos

13. N - contador, varia de 1 a NCAR

IDVI(N) - variável que indica se os vetores de deslocamen-  
tos e velocidades iniciais são nulos ou não

IDVI(N) = 0 - são nulos

IDVI(N)  $\neq$  0 - não são nulos

14. (IDVI(N)  $\neq$  0)

NND - contador, varia de 1 a NNOS

NNOD(NND) - número do nó

UO(NND,L) - deslocamento do nó NNOD(NND) na direção L (sistema global)

VO(NND,L) - velocidade do nó NNOD(NND) na direção L (sistema global)

## 15. NO(N) - número de nós carregados

IND(N) - tipo de carregamento (ver Figura (AIII.1))

OM(N) - frequência angular do carregamento no caso de  
IND(N) = 2, 3 ou 5

T1(N), T2(N), GAMA(N), ALFA(N), - ver Figura (AIII.1)

16. (NO(N)  $\neq$  0)

NNC - contador, varia de 1 a NO(N)

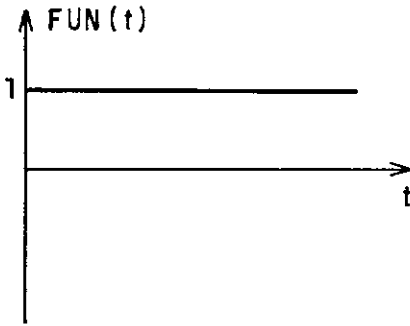
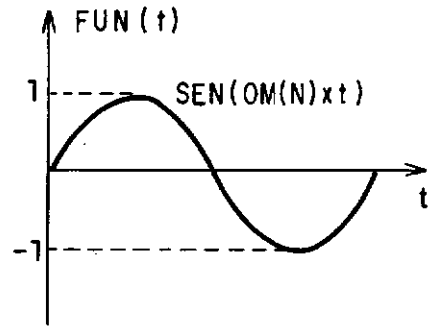
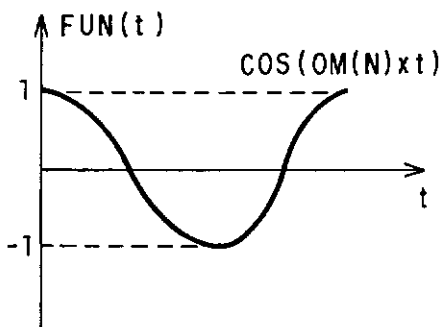
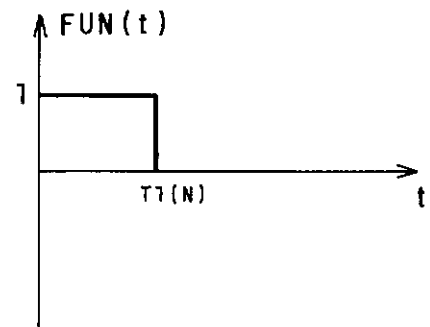
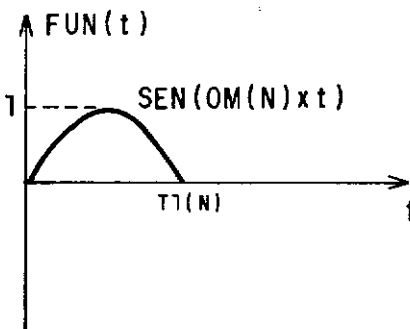
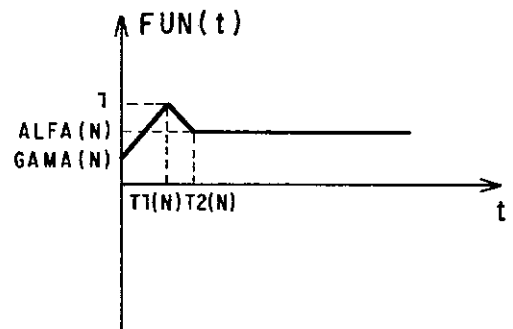
NNOC(NNC,N) - número do nó carregado

CCNO(NNC,L,N) - amplitude de carga aplicada no nó NNOC  
(NNC,N) na direção L (sistema global)

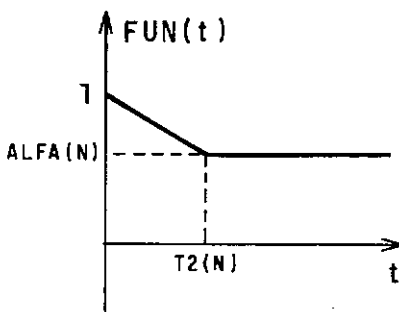
NINC - número de nós com carregamentos semelhantes a serem gerados

INC - incremento na numeração dos nós semelhantes (a ser somado a NNOC(NNC, N))

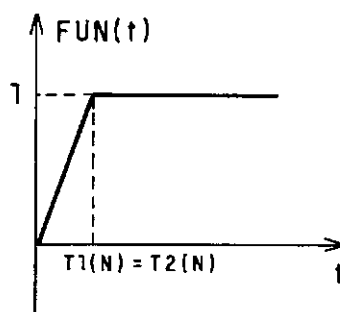
OBS.:  $F(t) = CCNO \times FUN(t)$

IND(N) = 1IND(N) = 2IND(N) = 3IND(N) = 4IND(N) = 5IND(N) = 6CASOS PARTICULARES DE IND(N) = 6

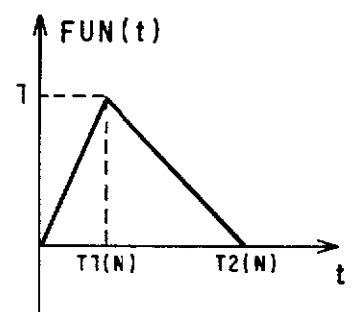
$T1(N) = 0$   
 $GAMA(N) = 0$



$T1(N) = T2(N)$   
 $GAMA(N) = 0$   $ALFA(N) = 1$



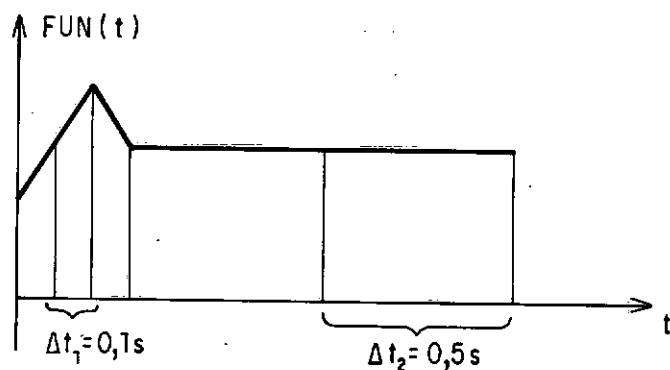
$GAMA(N) = 0$   
 $ALFA(N) = 0$



IND(N) = 7 : O CARREGAMENTO É LIDO A CADA ETAPA  
 FIG. (AIII-1)

17. NDEL - número de intervalos de integração ( $\Delta t$ )

Exemplo: (NDEL = 2)



18. NN - contador, varia de 1 a NDEL

DEL(NN) - intervalo de integração ( $\Delta t_i$ )

NETA(NN+1) - número da última etapa calculada com o intervalo de integração DEL(NN)

OBS.: NETA(1) é sempre igual a zero

Para o exemplo visto acima tem-se:

DEL(1) = 0,1s      NETA(2) = 3

DEL(2) = 0,5s      NETA(3) = 5

19. (Só no caso de INDM = 3)

NNC - contador, varia de 1 a NNOS

NNOM(NNC) - número do nó com massa concentrada

CM(NNC,L) - massa concentrada no nó NNOM(NNC) na direção L  
(sistema global)

NINC - número de nós com massa concentrada semelhante a serem gerados

INC - incremento na numeração dos nós semelhantes (a ser so  
mado a NNOM(NNC))

## 20. Constantes dos algoritmos

ZETA( $\zeta$ ) - para os algoritmos hermitianos linear e cúbico

ALF1( $\alpha$ ) e BET1( $\beta$ ) - para o algoritmo de Newmark

TETA( $\theta$ ) - para o algoritmo de Wilson- $\theta$

### AIII.3 - VETORES DE TRABALHO

As matrizes e os vetores utilizados nos algoritmos hermitiano linear, de Newmark e de Wilson- $\theta$  encontram-se ar  
mazenados em apenas 2 vetores (A e B). No algoritmo hermitiano  
cúbico encontram-se armazenados em 4 vetores (A, B, BB e AB). Ca  
so haja necessidade pode-se remanejar estes vetores de trabalho.

Sabendo que:

NEQ (número de equações) = NDESNO x NNOS

LF (largura de faixa) = NDESNO x (IDIF + 1)

onde IDIF = diferença máxima entre o nô final e o inicial de ca  
da elemento

tem-se as dimensões dos vetores de trabalho:

a) Para o algoritmo hermitiano linear

$$\text{DIM.A} = 3 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + 4 \times \text{NEQ} \times \text{NCAR} + 1 \ (\leq 65000)$$

$$\text{DIM.B} = 4 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + \text{NEQ} \times \text{NCAR} + 1 \ (\leq 65000)$$

b) Para os algoritmos de Newmark e Wilson- $\theta$

$$\text{DIM.A} = 3 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + 3 \times \text{NEQ} \times \text{NCAR} + \text{NEQ} \times \text{NEQ} + 1$$

$$(\leq 65000)$$

$$\text{DIM.B} = 2 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + 3 \times \text{NEQ} \times \text{NCAR} + \text{NEQ} \times \text{NEQ} + 1$$

$$(\leq 65000)$$

c) Para o algoritmo hermitiano cúbico

$$\text{DIM.A} = 5 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + 4 \times \text{NEQ} \times \text{NCAR} + \text{NEQ} \times \text{NEQ} + 1$$

$$(\leq 65000)$$

$$\text{DIM.B} = \text{NEQ} \times \text{NEQ} + 1 \ (\leq 65000)$$

$$\text{DIM.BB} = \text{NEQ} \times \text{LF} + \text{NEQ} \times \text{NEQ} + \text{NEQ} + 1 \ (\leq 65000)$$

$$\text{DIM.AB} = 4 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + 2 \times \text{NEQ} \times \text{NCAR} + \underbrace{\text{NEQ} \times \text{NEQ}}_{(\text{só quando INDC}=2)} + 1$$

$$(\leq 65000)$$

OBS.: Para o algoritmo hermitiano cúbico com interpolação cúbica das forças externas, as dimensões dos vetores de trabalho são as mesmas vistas acima, exceto a do vetor B que passa a ser:

$$\text{DIM.B} = \text{NEQ} \times \text{NEQ} + 2 \times \text{NEQ} \times \text{LF} + \text{NEQ} \times \text{NCAR} + 1 \ (\leq 65000)$$

# BIBLIOGRAFIA

1. CLOUGH, R. W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures - McGraw-Hill, Inc., 1975.
2. BATHE, K. J. and WILSON, E. L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice Hall, Inc., 1976.
3. BIGGS, J. M. - Introduction to Structural Dynamics - McGraw-Hill, Inc., 1964.
4. FERRANTE, A. J. - Apostilas do Curso de Mecânica das Estruturas II, 1980.
5. BREBBIA, C. A. and FERRANTE, A. J. (Editors) - The Finite Element Technique - Editora da UFRGS, 1975.
6. PRZEMIENIECKI, J. S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill, Inc., 1968.
7. ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C. and ANGELOPOULOS, T. - Nonlinear Oscillations Using the Finite Element Technique - Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. 2, 203-250, 1973.
8. ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C. and ANGELOPOULOS, T. - Dynamic Response by Large Step Integration - Earthquake Engineering Str. Dyn. 1, 185-203, 1973.



9. ARGYRIS, J. H.; DOLTSINIS, J. St.; KNUDSON, W. C.; VAZ, L. E. and WILLIAM, K. J. - Numerical Solution of Transient Nonlinear Problemas - Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. 17/18, 341-409, 1979.
10. WILSON, E. L.; BATHE, K. J. and FARHOOMAN, I. - Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 241-252, 1973.
11. BATHE, K. J. and WILSON, E. L. - Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 283-291, 1973.
12. HILBER, H. M. and HUGHES, T. J. R. - Collocation, Dissipation and "Overshoot" for Time Integration Schemes in Structural Dynamics - Earthquake Engineering and Str. Dyn., Vol. 6, 99-117, 1978.
13. GOUDREAU, G. L. and TAYLOR, R. L. - Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics - Comp. Methds. Appl. Mech. Eng., Vol. 2, 69-97, 1972.
14. WALTHER, R. - ASKA PART II - Direct Integration Using the Newmark Method - Lecture Notes and Example Problem - ASKA UM 228, 1980.
15. NICKELL, R. E. - On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics - Int. J. of Solids

Structures, Vol. 7, 301-319, 1971.

16. GLADWELL, I. and THOMAS, R. - Stability Properties of the Newmark, Houbolt and Wilson- $\theta$  Methods - Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 4, 143-158, 1980.
17. SERBIN, S. M. - On a Fourth Order Unconditionally Stable Scheme for Damped Second-Order Systems - Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 23, n° 3, 333-340, 1980.
18. KEY, S. W. and BEISINGER, Z. E. - The Transient Dynamic Analysis of Thin Shells by F.E.M. - Sandia Laboratories Albuquerque New México, 87115.
19. SERBIN, S. M. - "On Factoring a Class of Complex Symmetric Matrices Without Pivoting" (a ser publicado).
20. DOUGALIS, V. A. and SERBIN, S. M. - On Some Unconditionally Stable, Higher Order Methods for the Numerical Solution of the Structural Dynamic Equations - Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, 1613-1621, 1982.
21. VAZ, L. E. - Nitchlineare Instationäre Analyse mit der Methode der Finiten Elemente - Dr. Ing. Dissertation, 1981.
22. REGULATORY GUIDE 1.91 - Evaluation of Explosions Postulated to Occur on Transportation Routes near Nuclear Power

Plants. U. S. Nuclear Regulatory Commission - Office of Standards Development, Fevereiro 1978.

23. Richtlinien für die Bemessung von Stahlbetonbauteilen von Kernkraftwerken für aussergewöhnliche aussere Belastungen (Erdbeben, aussere Explosionen, Flugzeug-absturz). Institut für Bautechnik (If B.T.), julho 1974.

24. Hurty, W. C. and Rubinstein, M. F. - Dynamics of Structures - Prentice Hall, 1964.

25. VAZ, L. E. - Apostila do Curso de Dinâmica de Estruturas e Suas Aplicações Práticas (EEE - Efeito de Explosão em Estruturas), 1983.